

単項曲線の特異点に対する r 点のヒルベルトスキームについて

渡利正弘*

On the Hilbert schemes of r points for monomial curve singularities

Masahiro Watari

Pfister and Steenbrink studies Hilbert schemes of r points for monomial curve singularities. Our aim in this present paper is to show that if the Hilbert scheme of r points for given monomial curve singularity is irreducible, then it is a rational projective variety.

Key words Hilbert schemes of r points, monomial curve singularities

1. 導入

基礎体 k を標数 0 の代数閉体とする. 既約特異曲線の特異点に対する局所環 $\mathcal{O}$ が環

$$k[[t^{a_1}, \dots, t^{a_m}]] \quad (a_i \in \mathbb{N})$$

と同型であるものを, 単項曲線芽と呼ぶ. ここで $\gcd(a_1, \dots, a_m) = 1$ と仮定しても一般性を失わない. 局所環 $\mathcal{O}$ の元の位数の集合

$$\Gamma := \{\text{ord}(f) \mid f \in \mathcal{O}\}$$

を, 局所環 $\mathcal{O}$ に付随する半群と呼ぶ. 以下, 本稿で用いる主な記号を次の様に準備する.

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{O}} &:= k[[t]] \\ \overline{I}(n) &:= \{f \in \overline{\mathcal{O}} \mid \text{ord } f \geq n\} \quad (n \in \mathbb{N}) \\ I(n) &:= \overline{I}(n) \cap \mathcal{O} \\ \delta &:= \dim_k \overline{\mathcal{O}}/\mathcal{O} = \sharp(\mathbb{N} \setminus \Gamma) \\ c &:= \min \{n \mid \overline{I}(n) \subset \mathcal{O}\} \\ \text{Gr}(\delta, \overline{\mathcal{O}}/\overline{I}(2\delta)) &:= \{\overline{\mathcal{O}}/\overline{I}(2\delta) \text{ の } \delta \text{ 次元の部分空間}\} \end{aligned}$$

数字の 0 の位数を ∞ と定義することにより, 位数の集合 $\overline{I}(n)$ と $I(n)$ はそれぞれ, $\overline{\mathcal{O}}$ と $\mathcal{O}$ のイデアルになる. 上記の正整数 δ と c を, それぞれ局所環 $\mathcal{O}$ の δ -不変量, 導体と呼ぶ. これらについて, 次の命題が成立する.

命題 1 (cf. [3], p. 80, Proposition 7). 局所環 $\mathcal{O}$ の δ -不変量 δ と導体 c に対して, 関係式

$$\delta + 1 \leq c \leq 2\delta$$

が成立する. 特に $c = 2\delta$ となるのは $\mathcal{O}$ がゴレインシュタイン環の時, かつその時のみに限る.

ここで剰余環 $\overline{\mathcal{O}}/\overline{I}(2\delta)$ を考える. この環のベクトル空間としての次元が, 2δ であることに注意する. 次元が δ の部分ベクトル空間全体の集合を $\text{Gr}(\delta, \overline{\mathcal{O}}/\overline{I}(2\delta))$ と表す. $W \in \text{Gr}(\delta, \overline{\mathcal{O}}/\overline{I}(2\delta))$ がよい状態 (good) であるということを, 局所環 $\mathcal{O}$ の元との積

$$\mathcal{O} \times W \ni (f, \overline{v}) \mapsto \overline{fv} \in W$$

が定義され, この積に対して W が $\mathcal{O}$ -部分加群 であるときと定める. ここで $\text{Gr}(\delta, \overline{\mathcal{O}}/\overline{I}(2\delta))$ のよい状態である部分ベクトル空間の集合を

$$\mathcal{M} := \{W \in \text{Gr}(\delta, \overline{\mathcal{O}}/\overline{I}(2\delta)) \mid W \text{ はよい状態}\}$$

で表す. また記号 $\mathcal{M}_r$ で余次元が r である $\mathcal{O}$ のイデアルの集合を表すものとする. すなわち

$$\mathcal{M}_r := \left\{ I \subset_{\text{ideal}} \mathcal{O} \mid \dim_k \mathcal{O}/I = r \right\}$$

とする. 論文 [1] において, 写像

$$\begin{aligned} \phi_r : \mathcal{M}_r &\longrightarrow \mathcal{M} \\ \psi &\qquad \qquad \psi \\ I &\longmapsto t^{-r}I / I(2\delta) \end{aligned}$$

が定義できることが示された. また記号 ψ で $\text{Gr}(\delta, \overline{\mathcal{O}}/\overline{I}(2\delta))$ から射影空間 $\mathbb{P}^N$ ($N = \binom{2\delta}{\delta} - 1$) への Plücker 埋め込みを表すものとし, $\text{Gr}(\delta, \overline{\mathcal{O}}/\overline{I}(2\delta))$ の元 W の ψ による像を

$$\psi(W) = (\pi_{1,2,\dots,\delta}, \dots, \pi_{i_1,\dots,i_\delta}, \dots, \pi_{\delta+1,\dots,2\delta})$$

と表し, これを Plücker 座標と呼ぶ. 簡単のため添え字集合 $\{i_1, \dots, i_\delta\}$ を, 記号 Λ などで表す.

$$V_r := (\psi \circ \phi_r)(\mathcal{M}_r)$$

とおく. この V_r を, 与えられた特異曲線芽に対する r 点のヒルベルトスキームと呼ぶ. Pfister と Steenbrink は論文 [1] において, この写像 ϕ_r が次の性質を持つことを示した.

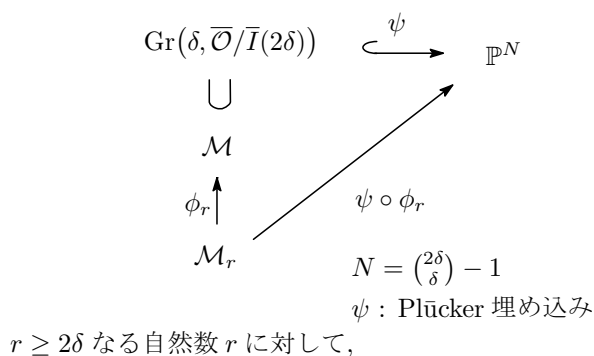
原稿受付 平成 22 年 8 月 31 日

*専門学科共通科目

定理 2 (Pfister, Steenbrink [1]). 写像 ϕ_r は単射である. 特に $r \geq 2\delta$ の時, 写像 ϕ_r は全単射である. 更に任意の自然数 r に対して, V_r はザリスキ閉集合である.

この定理より直ちに, 次の命題が導かれる.

系 3. もし $r \geq 2\delta$ ならば, $V_r = V_{2\delta}$ が成立する.



$$V := V_r$$

とおく. この射影代数多様体 V を **Pfister-Steenbrink 多様体**(PS 多様体) と呼ぶ. [1] では, 様々な単項曲線芽に対しての PS 多様体 V の構造が詳しく研究された. また [4] において, 次の既約な単純特異点

$$A_{2d}: x = t^2, y = t^{2d+1} \quad (d \geq 1),$$

$$E_6: x = t^3, y = t^4,$$

$$E_8: x = t^3, y = t^5,$$

に対して, 代数多様体 V_r ($1 \leq r \leq 2\delta$) の定義方程式が計算された.

本稿の目的は, 次の定理を証明することである.

定理 4. 任意の単項曲線芽に対する r 点のヒルベルトスキーム V_r ($r \geq 1$) は, 既約ならば有理的射影代数多様体である.

2. 定理 4 の証明

まず定理 4 の証明に必要な事柄を準備する. Plücker 埋め込み ψ を次のよう分解する.

$$\begin{array}{ccccccc}
 \psi: \mathcal{M} & \longrightarrow & \text{Gr}(\delta, 2\delta) & \longrightarrow & M_{\delta, 2\delta}(k)/\sim & \longrightarrow & \mathbb{P}^N \\
 \cup & & \cup & & \cup & & \cup \\
 W & \longmapsto & \langle \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_\delta \rangle_k & \longmapsto & A_W & \longmapsto & (\pi_{i_1 \dots i_\delta})
 \end{array}$$

$\mathcal{M}$ の元 W を $W = \langle f_1, \dots, f_\delta \rangle_k$ と表す. ここで $f_i = \sum_{j=0}^{2\delta-1} a_{ij} t^j \in \overline{\mathcal{O}}/I(2\delta)$ は W の k -ベクトル空間としての基底である. この基底の係数から定まる $k^{2\delta}$ の横数ベクトルを

$$\mathbf{a}_i = (a_{i0}, \dots, a_{i, 2\delta-1})$$

とおき, 上の合成写像に現れる最初の写像はこの自然な対応によるものである. 次に $\delta \times 2\delta$ 行列

$$A_W = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_i \\ \vdots \\ \mathbf{a}_\delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,0} & \cdots & a_{1,j} & \cdots & a_{1,2\delta-1} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i,0} & \cdots & a_{i,j} & \cdots & a_{i,2\delta-1} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{\delta,0} & \cdots & a_{\delta,j} & \cdots & a_{\delta,2\delta-1} \end{pmatrix}$$

を δ 次元 k -ベクトル空間 W の**表現行列**と呼ぶ. W の表現行列は基底を取り方に依存するが, 同じ W を表すことに注意する (それらは互いに相似である). 合成写像に現れる 2 番目の写像は, k -ベクトル空間 W にその表現行列を対応させる写像である. ここで同値関係 $\sim$ は相似を表す. 最後の写像は, A_W に Plücker 座標を対応させる写像である. ここで $\pi_{i_1 \dots i_\delta}$ は A_W の $i_1, \dots, i_\delta$ 列を選んでできる小行列の値を表す.

G を加法を演算とする半群とし, 加法に関する単位元 0 を持つものとする. 加法を演算とする半群 M が **G -半群**であるとは, G の元と M の元との加法

$$\begin{array}{ccc}
 +: G \times M & \longrightarrow & M \\
 \cup & & \cup \\
 (a, x) & \longmapsto & a + x
 \end{array}$$

が定義されていて, G の単位元 0 に対して

$$0 + x = x$$

が任意の M の元 x に対して成り立つことである. また S を M の部分集合とすると, S を含む M の全ての G -部分半群の族 $\{N_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ に対して

$$[S]_G := \bigcap_{\lambda \in \Lambda} N_\lambda$$

を S で生成された G -部分半群という. 特に G -部分半群 M に対して, $M = [S]_G$ となるような部分集合 S を M の G 上の**生成系**という.

局所環 $\mathcal{O}$ のイデアル I に対して, 集合

$$\Gamma(I) := \{\text{ord}(f) \mid f \in I\}$$

を, **I の半群**と呼ぶ. この $\Gamma(I)$ は Γ -半群である. $\Gamma(I)$ の Γ 上の生成系が $\{p_1, \dots, p_s\}$ であるとき, イデアル I を $(p_1, \dots, p_s)$ 型であるという. $(p_1, \dots, p_s)$ 型であるイデアル全体の集合を記号 $J(p_1, \dots, p_s)$ と表す. 2 つのイデアル I_1 と I_2 が同じ型を持つのは, $\Gamma(I_1) = \Gamma(I_2)$ が成立する時, かつその時のみに限ることに注意する.

補題 5. 局所環 $\mathcal{O}$ のイデアル I が $\mathcal{M}_r$ に属するのは, 関係式 $\#\{\Gamma \setminus \Gamma(I)\} = r$ が成立する時, かつその時のみに限る.

補題5の証明は簡単なので省略する.

注意 6. 補題5は, イデアルの余次元は型によって決められる事を示唆している.

命題 7. もし $J(p_1, \dots, p_s) \subset \mathcal{M}_r$ であれば, $(\psi \circ \phi_r)(J(p_1, \dots, p_s))$ はアフィン空間である.

(証明) $I \subset \mathcal{O}$ を $(p_1, \dots, p_s)$ 型で余次元が r のイデアルとする. ここで δ 次元 k -ベクトル空間 $\phi_r(I)$ の基底を $\langle f_1, \dots, f_\delta \rangle_k$ とおく. ただし

$$f_i = x^{d_i} + \sum_{j=d_i+1}^{2\delta-1} a_{i,j} x^j, \quad (1 \leq i \leq 2\delta).$$

すると表現行列 $A_{\phi_r(I)}$ は, 次のような簡約階段行列にとることができる.

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & a_{1,d_2} & \cdots & a_{1,d_\delta} & \cdots & a_{1,2\delta-1} \\ & & & & & 1 & \cdots & a_{2,d_\delta} & \cdots & a_{2,2\delta-1} \\ & & 0 & & & & \ddots & \vdots & & \vdots \\ & & & & & & & 1 & \cdots & a_{\delta,2\delta-1} \end{pmatrix}$$

この時, 基底 f_1 から f_δ のそれぞれの先頭項に対応する Plücker 座標は

$$\pi_\Xi = 1, \quad (\text{ここで } \Xi = \{d_1 + 1, \dots, d_\delta + 1\})$$

となる.

また任意の添え字集合 Λ に対して,

$$(1) \quad \pi_\Lambda \in k[a_{i,j} | 1 \leq i \leq \delta, d_1 \leq j \leq d_\delta]$$

となることに注意する. 更に $A_{\phi_r(I)}$ の任意の成分 $a_{i,j}$ ($1 \leq i \leq \delta, d_1 \leq j \leq d_\delta$) に対して

$$(2) \quad \pi_\Lambda = (-1)^l a_{i,j}$$

となる自然数 l と添え字集合 Λ がかならず存在する.

例えば $\Lambda = \{d_1 + 1, \dots, d_{i-1} + 1, j + 1, d_{i+1} + 1, \dots, d_\delta + 1\}$ とすればよい.

座標 π_Ξ で同次座標を非同次化し, その非同次座標を

$$X_\Lambda = \frac{\pi_\Lambda}{\pi_\Xi}$$

とおく. この時, 代数多様体 $(\psi \circ \phi_r)(J(p_1, \dots, p_s))$ のアフィン多様体としての定義イデアルを J とすると, その座標環

$$k[X_{1,2,\dots,\delta}, \dots, X_{\Xi}, \dots, X_{\delta+1,\dots,2\delta}]/J$$

は適当な多項式環と同型になる. よって代数多様体 $(\psi \circ \phi_r)(J(p_1, \dots, p_s))$ は, 適当な次元のアフィン空間と同型になる.

次の命題は, よく知られた事実である.

命題 8 ([2], p.26, Corollary 4.5). 任意の既約な2つの代数多様体 X と Y に対して, 次の条件は同値である.

- (1) X と Y は, 双有理同値
- (2) X と Y のそれぞれの開集合 U, V で, $U \cong V$ となるものが存在する

(定理4の証明) 写像 $\psi \circ \phi_r$ は単射なので, 以下では $J(p_1, \dots, p_s)$ と $(\psi \circ \phi_r)(J(p_1, \dots, p_s))$ を同一視する. 任意の型 $(p_1, \dots, p_s)$ に対して $J(p_1, \dots, p_s)$ は, 命題7より適当なアフィン空間に同型である. 更に命題8より $J(p_1, \dots, p_s)$ は適当な射影空間と双有理同値となる. $\square$

参考文献

- [1] G. Pfister, J.H.M. Steenbrink, “Reduced Hilbert schemes for irreducible curve singularities”, J. Pure and Applied Algebra. **77**, 103-116, (1992).
- [2] R. Hartshorne, “Algebraic Geometry”, Springer, (1977)
- [3] J. P. Serre, “Groupes Algébriques et Corps de Classes”, Hermann, Paris, 1959.
- [4] 相馬芳紀, “平面曲線の単純特異点に対する r 点のヒルベルトスキーム”, 埼玉大学理工学研究科数理電子情報専攻 修士論文 (2010)