

位相差を加えた光線近似による虹の計算

佐藤誠*

Ray trace simulation of rainbow with interference by phase shift

Makoto SATO

A new calculation method of rainbow angles for wavelengths is proposed, which consists of a ray trace simulation and a phase shift calculation. Because supernumeraries inside the primary bow is caused by optical interference, a simple ray trace method is not able to treat the phenomena. However introducing an idea of complex intensity according to phase shift, we can simulate the rainbow with good approximation and less amount of calculation.

Key words : rainbow, ray trace, interference, complex intensity, phase shift

1. はじめに

本校は内陸の盆地に位置するためか夏場は激しい夕立に見舞われる機会が多く、そのため虹を見る回数も多い。津山高専の校舎からからは、東方向、北辰寮の上に架かる虹を頻繁に見る。Fig.1はそのような虹の例である。主虹の外側に色の順序が逆の副虹が確認でき、さらにFig.2の写真のように主虹の内側に過剰虹を確認できる。ただし、写真のように副虹や過剰虹まで明瞭に観察できることは比較的稀である。

虹の理論は、1637年、R. Descartes の「3つの試論の内の気象学第8章、虹」に、彼自身が発展させた屈折の法則を用いて初めて与えられた。Descartes は球形雨滴の断面図に10000本もの入射平行光線を作図し、雨滴を射出する光線が、入射光と42度の角度をなす方向に際立って集中することを確認した。また、内部で2回反射する場合、52度に集中することを確認した。しかし、虹の色については1666年のI. Newton による「光学」の説明を待つことになる。Newton は色毎の水の屈折率を測定し、その結果を用いて、虹の色と見られる角度を計算し、実際の虹に良く一致することを確認した。このように幾何光学で主虹と副虹の存在、それらの見える方向と色の特徴を説明することに成功した。また、主虹と副虹に挟まれた空の部分には水滴からの光の反射光が戻ってこない部分があり、少し暗く見えることも説明できた。この暗い部分はアレクサンダーの暗帯と呼ばれ、Fig.1の写真でも確認できる。

過剰虹は、幾何光学からは説明できず、Thomas. Yang による光の干渉に関する法則（1803年）を待たねばならない。1838年にG. B. Airy が虹の回折理



Fig. 1 A main rainbow and a secondary rainbow.



Fig. 2 Supernumeraries inside the same primary bow in fig. 1, but in different direction.

論を完成させ、Airy の虹積分と呼ばれる関数を用いて虹の強度分布を求めた。この計算はかなり乱暴な近似計算であるが現実の虹を再現良く説明できるこ

とが知られている。厳密には誘電体球による電磁場の散乱を Maxwell 方程式を直接解いて求めた Mie の散乱理論によることになる。Airy の虹積分は Mie の散乱理論で散乱体半径を大きくしたときの漸近解になる¹⁾。

それでは、虹の計算を Mie の散乱理論によって計算すれば、厳密に求めることができるのではないということになるが、残念ながら現実には困難を伴う。Mie の散乱理論は霧のような小さな散乱体に対しては容易に計算できるが、虹を発生させるような大きな水滴では計算量が膨大になり、計算機で算出すると誤差が累積してノイズの多い、意味の無い結果しか得られない。

近似解である Airy の虹積分も事情は似ており、積分に周期関数を含むため収束が極めて悪く、計算に時間がかかると同時に精度が得られない。

虹を再現するには、見える角度と色のほかに、水滴境界での屈折や反射に伴う強度の変化を考慮しなければならない。透過率や反射率は偏光依存性があるので、境界面に電界が平行な S 波と電界が垂直な P 波についてそれぞれ計算する必要がある。Airy の虹積分では偏光や反射・屈折の効果が考慮されていないので、計算の質の問題だけでなく上記の問題もあり虹の計算方法として不満が残る。

本報告では、Descartes の光線近似に光路長による位相差をもとに、光線に複素強度を与え、最終的に同じ出射角同士で加算するという近似計算方法を提案する。光線近似は光の干渉とは相容れない概念であるが、量子力学における経路積分²⁾に類似した概念を持ち込むことにより計算が可能になるというアイデアである。もちろん乱暴な近似であることは承知の上であるが、光線の経路積分は最短経路付近の寄与が主となりそれ以外の経路からの寄与は小さくかつ互いに相殺する性質があるので、光線近似に複素強度を乗せる計算に物理的な裏付けが無いわけではない。どちらにしてもかなり突飛な計算方法であり、あまり感心できない方法であるが、虹の計算に適用してみたところ、少ない計算量で意外にも良く再現できることが分かり、虹の特徴を非専門家に説明する際には判りやすい理論ではないかと思われる。

以下、幾何光学による色と見える角度の説明と、複素強度の導入による過剰虹を含む虹の明るさの再現について説明する。

2. 幾何光学による計算

Descartes が行った作図に習い、光線追跡法で計算を行う。Fig.3は球状水滴の中心を含む断面を表す。入射光線は必ず球の中心を含む1つの平面内に拘束

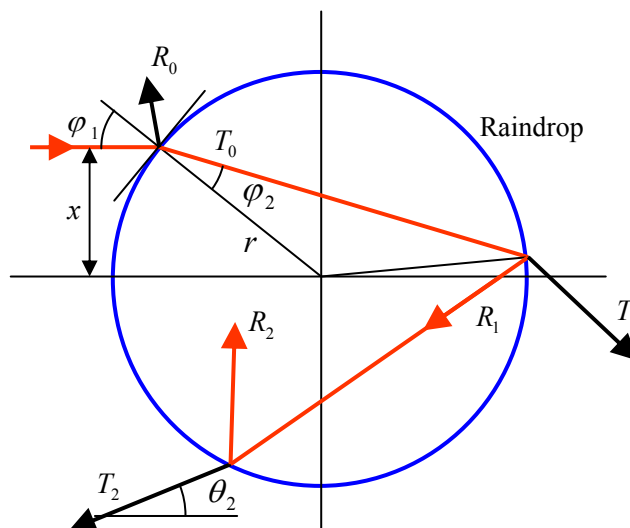


Fig. 3 Ray trace through a raindrop. T and R represent transmission and reflection. Suffix number for R is the count of reflection inside the raindrop and for T is one larger than the count.

されるので、円筒として近似することができる。

射出光線については雨滴内部での反射回数に 1 を加えた数を次数 m として、 $m = 2$ の光線が主虹、 $m = 3$ が副虹となる。雨滴表面で反射する光線の次数は $m = 0$ 、内部反射無しにすり抜ける光線は $m = 1$ となる。

Fig.3より雨滴から射出される光線の仰角（入射太陽光線が水平のとき地上から見上げる角度）は、次の関係式に表せる。

$$\theta_m = (2 - m)\pi - 2 \sin^{-1} \frac{x}{r} + 2m \sin^{-1} \frac{x}{nr} \quad (1)$$

ここで、 x は入射光線の雨滴中央からの距離、 n は水の屈折率、 r は雨滴の半径である。この角度計算は雨滴表面での反射 R_0 にも適用される。

虹は色のリングでできているわけではなく、 $m = 2$ の光線についていえば、ある最大角度の内側に散乱されており、最大の仰角付近で光線が集中して明るく見えるわけである。Fig.4に入射光線の位置と散乱光線の仰角の関係から虹の見える角度が決定される説明を示す。虹の見える角度は散乱光線の仰角の微分値が 0 となる角度となる。次数 m の光線の仰角の微分は次式で表される。

$$\frac{d\theta_m}{dx} = -\frac{2}{r} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{r}\right)^2}} + \frac{2}{nr} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{nr}\right)^2}} \quad (2)$$

この最大角度の値が屈折率の波長依存により、波長の長い赤色は高い仰角に、波長の短い青色は低い

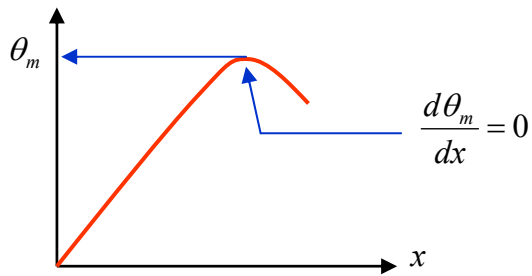


Fig. 4 The angle where the differential coefficient of outgoing angle to offset x of incident ray equals zero is the angle of rainbow.

仰角となり、色のグラデーション、すなわち虹をもたらす。

Fig.5のグラフは、入射光線の雨滴中央からの変位 x を横軸、次数 $m=1$ から 11 までの射出光線の仰角 θ を縦軸に描いたものである。水の屈折率は $n = 1.33$ とした。

2 次の射出光線については、グラフの極大が仰角 42度付近に、3 次射出光線については、極小が52度付近に確認できる。3 次射出光線では仰角極小のた

め、色の順番が主虹と逆向きになることがわかる。0 次と 1 次の散乱光は仰角が90度を超えるので虹を見る側からは見えない。また、極値を持たないので透過では虹のような現象は発生しないことが分かる。2 次と 3 次の光線のみとすると主虹と副虹の間に散乱光の存在しない角度領域が存在することが分かる。これが暗帯である。4 次以上の射出光線についても、極値となる仰角が存在するので、4 次の虹、5 次の虹が見えても良さそうであるが、これを確認するには強度について計算する必要がある。

3. 強度計算

水滴表面の境界での光の反射率、透過率はフレネルの式から以下のように計算される。

$m=0$ については、

$$\begin{aligned} R_{s0} &= I \cos \varphi_1 \cdot \alpha \\ R_{p0} &= I \cos \varphi_1 \cdot \beta \end{aligned} \quad (3)$$

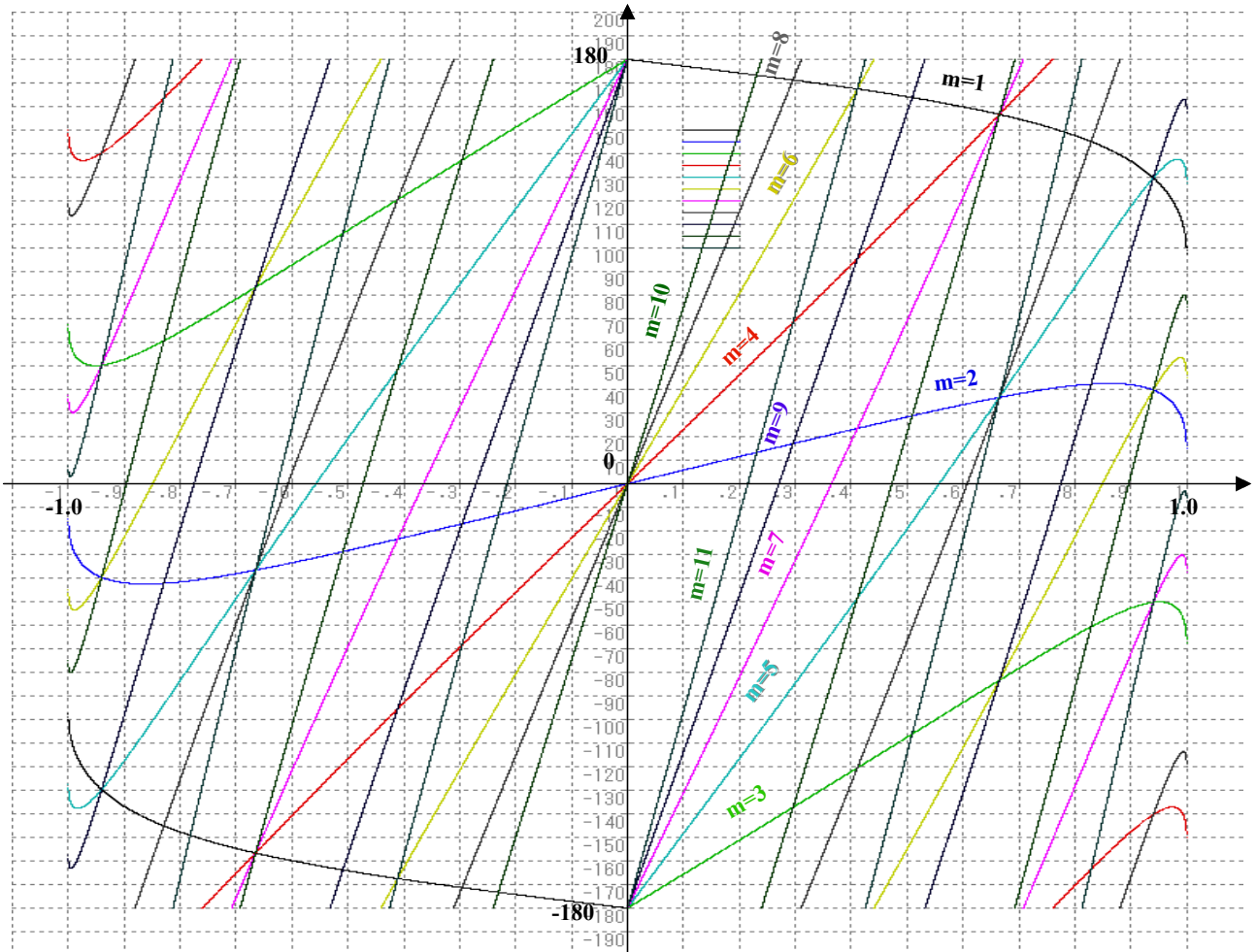


Fig. 5 Calculated relations between angle of elevation θ and offset x of incident ray for some m . Refractive index n of raindrop is 1.33.

となる．添字の s と p はS波とP波を表す． I は入射光線の強度である．ここで α と β は次の通りである．

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{\sin^2(\varphi_1 - \varphi_2)}{\sin^2(\varphi_1 + \varphi_2)} \\ \beta &= \frac{\tan^2(\varphi_1 - \varphi_2)}{\tan^2(\varphi_1 + \varphi_2)}\end{aligned}\quad (4)$$

$m \geq 1$ については，次のように表せる．

$$\begin{aligned}Rs_m &= I \cos \varphi_1 \cdot (1 - \alpha)^m \alpha \\ Rp_m &= I \cos \varphi_1 \cdot (1 - \beta)^m \beta \\ Ts_m &= I \cos \varphi_1 \cdot (1 - \alpha)^{m+1} \\ Tp_m &= I \cos \varphi_1 \cdot (1 - \beta)^{m+1}\end{aligned}\quad (5)$$

雨滴の屈折率の波長依存性は，理科年表に掲載されているいくつかのデータを補間して，Fig.6の関数で近似した．

ここまでの議論で幾何光学的な虹の計算は完結でき，主虹，副虹，暗帯，偏光，高次散乱光の寄与を調べることができる．しかし，干渉現象である過剰虹についての情報は当然ながら得られない．

幾何光学の範囲で計算すると， $m=4$ 以上の寄与は小さく， $m=0$ の表面反射も含めて，ベースのオフセットを与えるのみで，特徴的な色のパターンを発生することは無いことが確認される．また，主虹の原因となる光線が，雨滴内部で反射する角度は，33度付近になり，これが Brewster 角 37 度に近いため虹はS波（虹の円弧に沿った方向）にほぼ偏光していることが分かる．

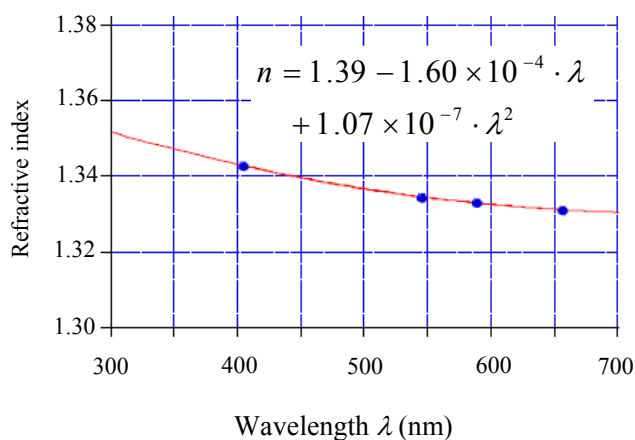


Fig. 6 Refractive index of water. The 4 data in graph are from reference 1. The temperature of water is 20 degree in centigrade.

4. 複素強度の導入

光線の雨滴による散乱は，前節までの議論にしたがい幾何光学的に算出する．強度についても同様であるが，ここで新たに導入する考えは，光路長差による位相である．Fig.7に考え方を示す．ある基準の位置を出発点として，光の進んだ光路すなわち実際の距離に屈折率を乗じた距離を波長で除して，端数に 2π を乗じた値を位相角度として導入する．矢印の長さを光線の強度，回転角度を位相角度とする．

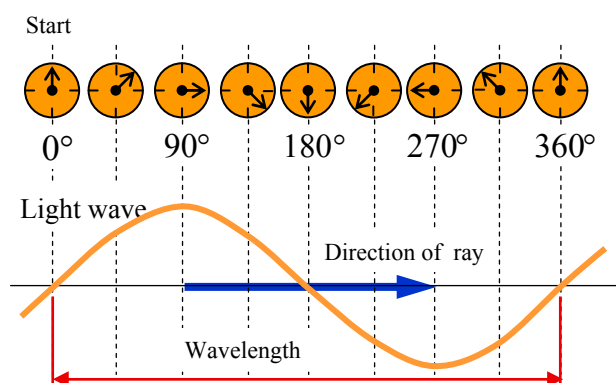


Fig. 7 Illustration of complex intensity of a ray. Radius of a clock panel represents intensity, and angle of an arrow represents phase.

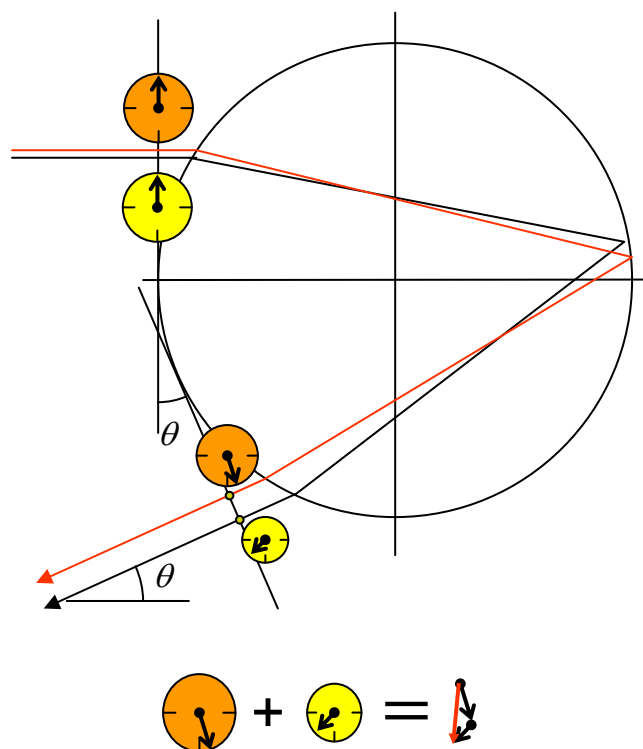


Fig. 8 Intensity is obtained as vector sum of complex intensities of rays in same outgoing direction.

複素平面のベクトルと同じ表現になるので、これを複素強度と呼ぶ。反射や屈折による強度の減小は、矢印の長さの縮小になる。図では時計の文字板と針で表し、光線の固有の時計として示す。最終的に強度計算する際は、Fig.8に示すように同じ角度に散乱される光線の複素強度をベクトル和として計算する。この計算方法は量子力学における経路積分に類似の方法である。ただし、確率の最も高い幾何光学的な経路（フェルマーの原理による最短経路）のみの重ね合わせという、かなりいい加減な近似になっており、このような計算が果たして許されるものか正直言って筆者も半信半疑である。

計算結果を Airy の虹積分による計算と比較してみた。ただし、上述したように Airy の計算では、反射屈折による強度の影響や偏光の効果は考慮されていないので定性的な比較しかできない。Fig.9は波長 550nm について雨滴径 0.1mm と 1.0mm について計算した結果である。Airy 理論の結果は角度については現実の虹を良く再現していることが判っており、虹の角度は幾何光学的に求めた値より低角度側になる¹⁾。我々の方法では幾何光学で射出角度を決定しているため高角度側に鋭いピークの形で主虹が

計算される。全体的には、過剰虹のピーク角度が高角度側にずれているものの周期や形は良く一致していることがわかる。我々の計算では高次の散乱項の影響も取り入れているので光強度のオフセットが表れている。また、偏光依存性も算出される。

本報告で提案する計算方法は、物理的には正しくなく、Airy 理論の結果とも角度に大きな食い違いが見られる。しかし、干渉以外の部分は幾何光学の概念を用い、干渉は、波の位相を考慮した複素強度を導入するという解かり易い説明になっている。虹の特徴を定性的には説明可能なので、説明のための方法としては有効であると思われる。

光学現象の計算には、一般に BPM や FDTD といった大規模なシミュレータソフトが用いられるが、大きな角度の屈折や反射には対応できない、膨大な計算量を要するなどの使い辛さがある。ここで提案する光線追跡法は簡便な計算で干渉も含めて強度を算出することができるので厳密ではないが現象の概略を把握するのに適しており、応用範囲は広いと期待される。なお、本報告における計算はすべて十進BASIC³⁾を用いて行った。

4. 虹の計算結果

Fig.10は雨滴径 0.1mm の場合の、波長400nm（青色）、500nm（緑色）、600nm（赤色）についての計算結果である。過剰虹などの暗い構造を分かり易くするため明るさを対数表示してある。偏光依存性が強く、主虹も副虹もS波に偏波していることがわ

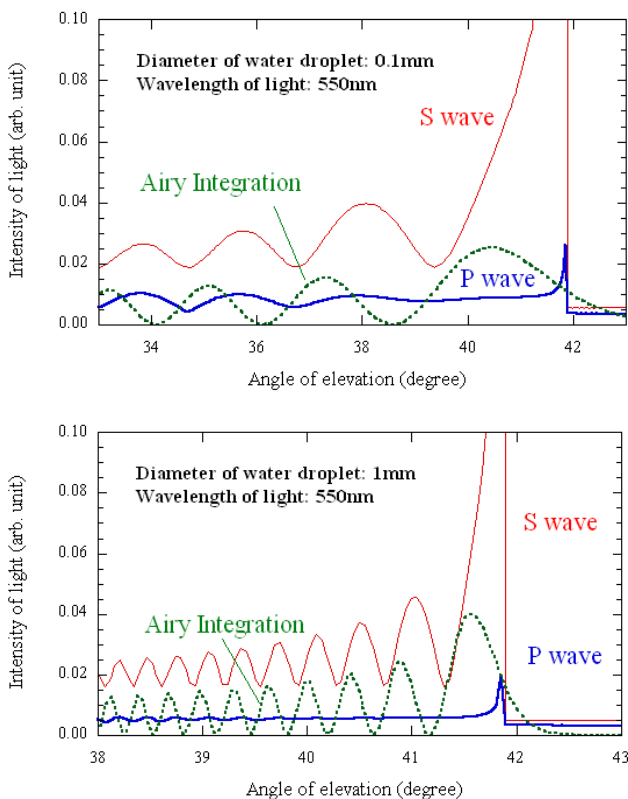


Fig. 9 Calculated results of Airy integration and the ray trace with complex intensity. Although the angle is shifted higher side from Airy integration result, the pattern of supernumeraries shows good agreement qualitatively.

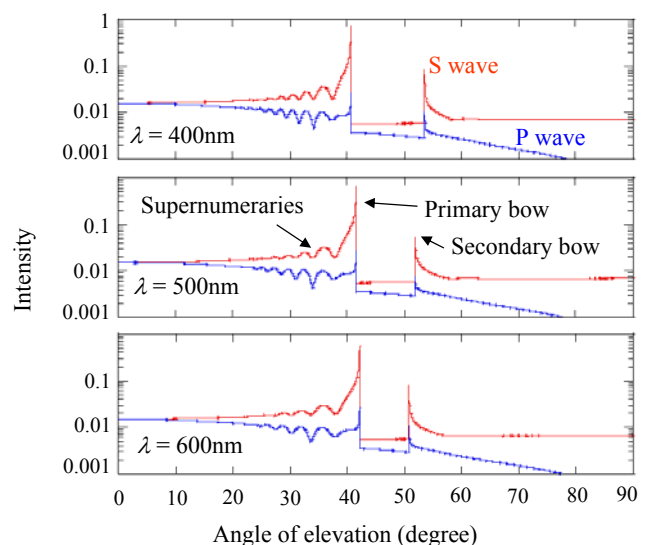


Fig. 10 Calculated results for some wavelengths. Scattering intensities are normalized with injecting light intensity and are plotted in log scale. Diameter of raindrop is 0.1mm.

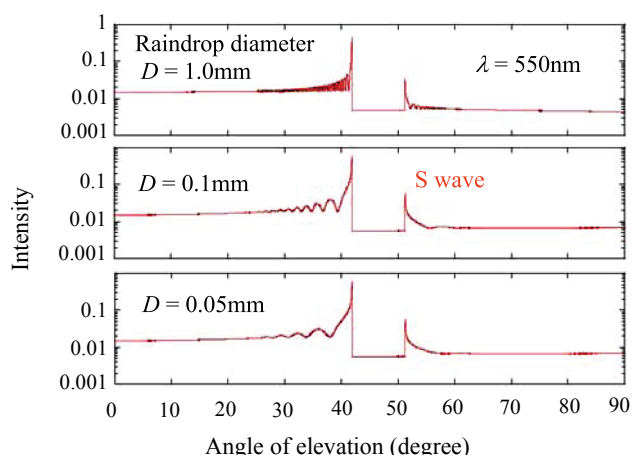


Fig. 11 Raindrop diameter dependent of supernumeraries.

かる．Airy 理論との比較で確認したように，本方法では主虹のピーク値が高く出る傾向があるため，実際にはグラフほどの主虹と副虹の強度比はないと推測される．波長が長い（赤色）ほど主虹の角度が高いことが確認される．逆に副虹では低くなることが確認できる．主虹と副虹に挟まれた角度領域では，暗いことが確認される．過剰虹の角度は長波長ほど主虹の角度と同じように高角度側にずれているとは思われるが，同時に明線の間隔が広がっているのので，内側最初の過剰虹については色が重なる結果になっている．2 番目の過剰虹では色のピークが主虹と逆転して赤が内側，青が外側になるようである．3 番目以降は各色が重なって白っぽく見えるのではないかと推測される．過剰虹の色は実際複雑で主虹の繰り返しにはなっていない．干渉現象なので波長と雨滴の大きさの関係で表れ方が変化することが容易に推測できる．

次に，雨滴の大きさによる効果を調べるため，同じ波長（550nm）について，雨滴径を 1mm, 0.1mm, 0.05mm について計算して比較してみた．Fig.11に S 波についての結果を示す．雨滴径が大きいと過剰虹の周期が細かくなることがわかる．周期が細かいと色が重なり過剰虹はただの白っぽい領域になり確認できなくなるだろう．逆に雨滴径が小さいと間隔が広くなりコントラストも落ち，やはり白っぽく消えてしまうと思われる．光線近似により角度を求めている関係で主虹と副虹の位置は雨滴径に依存しない結果が得られるのであるが，過剰虹の部分の形を見ると，雨滴径が小さいほど低角度側にシフトすることが推測される．

過剰虹の繰り返し間隔が雨滴径が大きいほど細かいことが計算から分るが，実際の虹でこの様子が観



Fig. 12 A photograph of supernumeraries. The width of supernumeraries becomes wider as height becomes higher. The diameters of raindrops in higher position in the sky are supposed to be smaller than those in lower position. This photograph was taken at 18:30 on August 12, 2010.

察されることがある．Fig.12は今年の夏に撮影した虹で，副虹と過剰虹が確認できる．興味深いことに過剰虹の間隔が高いところほど広がっており，主虹と平行ではないことがわかる．雨滴は落下するにしたがいその径が大きくなると思われるので，上空ほど径が小さく，したがって過剰虹の繰り返し間隔が広がるという説明ができる．角度を測定すれば，シミュレーションの結果から雨滴の径を見積もることも可能だろう．

5. まとめ

名だたる光学の先駆者がその時々最先端の理論を虹に適用して虹の詳細を明らかにしてきた歴史があり，虹の解明への欲求が原動力となって光学が発展してきたのではないかとさえ思える．本報告では幾何光学に位相差を考慮した複素強度を導入することで近似的に干渉現象を扱える計算方法を提案し，虹の計算に適用した．角度計算は幾何光学の域を出ないが，定性的な特徴をつかまえることは可能であることが分った．他の光学現象にも応用可能と期待される．

参考文献

- 1) 鶴田匡夫：「光の鉛筆」，アドコム・メディア（株），30章(1984)248
- 2) R.P.ファインマン：「光と物質のふしぎな理論」，岩波書店，(1987)
- 3) <http://hp.vector.co.jp/authors/VA008683/>，十進BASICホームページ