

物理答案に頻出する計算間違いのパターン

佐藤 誠*

Patterns of miscalculations found frequently in physics examination sheets

Makoto SATO

Trivial miscalculations prevent many students from understanding physics. In this report samples of miscalculations collected from physics examination sheets are categorized into several patterns. Recognizing how these miscalculations occur helps students to avoid these trivial mistakes and to learn physics under less stress.

Key Words : physics, learning, miscalculation, examination

1. はじめに

「物理はむずかしい」と学生から訴えられる。試験で点数が取れないと云う。高校生レベルの物理で扱う基本アイデアは限られており、使う数学も中学生レベルであるから、基本され押さえればこれほど点数の取りやすい教科は無いと教える側は思うのであるが、現実には定期試験の平均点が30点を下回ることも少なくない。状況は本校に限らず進学校でも同様で、大学受験に不利と受け止められる物理の履修は30%程度にまで減少しているとの報告がある。本校では、専門の工学教科を学習するための基礎として全員に物理の履修が義務付けられており、本校卒業生が創造的エンジニアとして社会で活躍する下地を提供してきた。物理離れが進む状況にあつては本校における物理の全員履修は今後ますます相対的にも重要性が高まるものと思われる。

定期試験の答案を採点する際に、不思議な計算ミスをする学生が多いことに気付く。これは計算を伴う科目では共通して感じることにしく、教員の間では良く話題になるが、笑い話で終わることが多い。どのような理由で計算間違いをしているのかを各答案でトレースし、計算間違いを収集してみたところある程度類型別に整理できることに気付いた。本報告では物理の定期試験に見られる誤計算を類型別に提示し、その原因を分析する¹⁾。

物理の学習を困難にしている大きな理由のひとつに、単純な計算ミスの積み重ねがあると感じている。学生に対して計算ミスのパターンを提示することにより注意を喚起し、計算ミスを防ぐ工夫を実践できれば、物理学習の困難をかなりの程度軽減できると

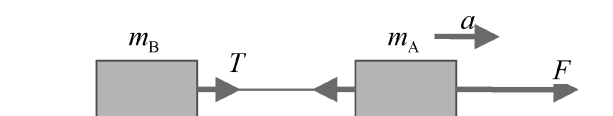


図1 加速度 a と張力 T を求める問題

期待している。そのような意味で教員が学生の計算ミスのパターンを理解しておくことは有用である。

2. 計算ミスの分類

具体的な例を挙げて計算ミスの類型を示す。図1は、2年生前期中間試験の問題である。この問題に対して運動方程式を記述した学生は45名中20名、正答を導いたのは5名である。大雑把に見て物理は解っているが正答にたどり着けない学生が約3割は存在すると思われる。

運動方程式は、

$$\begin{aligned} m_A a &= F - T \\ m_B a &= T \end{aligned} \quad \dots (1)$$

である。これを、 a と T について計算することが求められるが、典型的な計算ミスを以下に挙げる。

類型1. 方程式を解く意味が判っていない例

$$a = \frac{F - T}{m_A} = \frac{T}{m_B} \Rightarrow a = \frac{m_A T - m_B (F - T)}{m_A m_B} \quad \dots (2)$$

その場しのぎの算術を駆使するため、数式展開を矢印で表さざるを得なくなる。この例には解 a に求めるべき T が表れるパターンも含まれる。

類型2. 乗除算における分配則の誤計算

$$T = m_B \frac{F}{m_A + m_B} = \frac{F}{m_A} \quad \dots (3)$$

類似のパターンに次のように分母で分解するものがある。

原稿受付 平成21年8月31日

* 一般科目 satom@tsuyama-ct.ac.jp

$$T = \frac{Fm_B}{m_A + m_B} = \frac{Fm_B}{m_A} + F \quad \cdots(4)$$

また、分子に分数がくると、横線の意味の取り違えが起き、除算の因子が乗算の因子に変化する例もある。

類型3. 移項と乗除算同時処理時の誤計算

$$2F = (m_A + m_B)a$$

$$a = \frac{m_A + m_B}{2F} \quad \cdots(5)$$

方程式の場合、移項を含んだ複数の計算処理を行うときミスが発生し易い。移項時に加算が除算に変化する例も多い。符号の取り違えも頻繁に行われる。次の例も複数処理に伴う誤計算である。

$$\lambda = \frac{-2 \pm \sqrt{-4}}{2}$$

$$= -1 \pm 2i \quad \cdots(6)$$

以上、3つの類型を示した。この3類型は、学年に因らず頻出する誤計算である。紙面の関係で列挙できないが同じ類型に分類される中にもさまざまな誤計算を見つけることができる。

次の3年生の学年末試験での剛体の慣性モーメントを算出する問題における簡単な計算例で一例を示す。

$$I_0 = \frac{1}{12} ML^2 + Mx^2 \quad \cdots(7)$$

上記2の分配則の類型であるが、驚くことに少なからぬ人数で、

$$\frac{13}{12} ML^2 x^2, \frac{1}{12} ML^2 x^2, \frac{1}{12} M(L^2 + x^2) \quad \cdots(8)$$

といった変化に富む個性的な計算が行われる。3年終了時まで間違いを修正されずに放置されている事実からは教える側の責任を感じざるを得ない。

その他に複数の定期試験から抽出した誤計算の類型を以下に列挙する。

類型4. 形式に引きずられる誤計算

一つ目は、方程式の移項ミスであるが、比計算の形式に引きずられているものと推測される。

$$a \cdot b = c \cdot d$$

$$\frac{d}{b} = \frac{c}{a} \quad \text{もしくは} \quad \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad \cdots(9)$$

つまり、 $a:b=c:d$ を

$$\frac{d}{b} = \frac{c}{a} \quad \text{もしくは} \quad \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad \cdots(10)$$

と形式的に記憶しており、それを式形の似ている $a \cdot b = c \cdot d$ に適用したものと思われる。

2つ目は、分配則に類するが、次のパターンである。

$$\frac{1}{1 - \frac{m}{M}} = 1 - \frac{M}{m} \quad \cdots(11)$$

このような式変形を行う学生は、この計算で正しいと確信している可能性が高い。

3番目は式の形式に引きずられる誤計算である。単なる凡ミスであるが、学習の阻害要因として重要である。

$$12 - 2^3 \div \frac{1}{2} = 8 \quad \cdots(12)$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{3} = \frac{1}{2} \quad \cdots(13)$$

どちらも分母の上と下で消すという処理が適用されたものである。

類型5. 暗記に頼った計算

これは誤計算ではなくその場しのぎであるが、多く見られる。一夜漬けの成果であろう。

$$I \frac{d^2 \theta}{dt^2} = Mg \sin \theta$$

$$\frac{d \theta}{dt} = \sqrt{\frac{Mg \sin \theta}{I}}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{Mg \sin \theta}{I}} \quad \cdots(14)$$

初めの運動方程式が間違っているが、途中個性的な計算を行い、最後に振り子の角速度と角振動数を混同する間違いをしている。

類型6. 文字の変身

英文字の筆記体を学ばなくなって久しく、手書き答案における小文字と大文字の区別が付け難い。特に速度を表す v と V 、質量の m と M 、数字の 1 と l (エル) あるいは 7 、ギリシャ文字の μ と v 、 r などが相互に入れ替わり易い。

$$mv = mv_A + Mv_B$$

$$v = v_A + v_B \quad \cdots(15)$$

次のような例もある。活字からは推測し難いが、

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} = \frac{1}{R} \frac{d^2 x}{dt^2}, \quad \frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{5}{7} g \sin \varphi$$

より、

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} = \frac{5}{7} \frac{5}{12} \sin \varphi \quad \cdots(16)$$

と誤計算される。この例では、 g が 5 に、 R が 12 に変化していた。

類型 7. SIN と COS の取り違い

三角関数については図2のaのような形での定義は充分理解されているが、物理で使う際の方法が習得されていない。2つの問題があり、一つはsinとcosの選択の問題である。図2のbやcのように回転、反転するとsinとcosのどちらに対応するのか判別できなくなる学生が多い。さらにsinとcosの数値を逆に代入することが頻繁に見られる。これは公式として $\sin \theta = c/a$, $\cos \theta = b/a$ と式の形を覚えて、その意味を捉え切れていないことから生じている。2つ目の問題は、物理では定義式のままで使うことはまず無いことである。ベクトルの成分計算では、 $c = a \sin \theta$, $b = a \cos \theta$ の形で三角関数が表れる。この形に慣れることが必要だが、定義を解っていることが逆に学習の妨げになっており、前者の困難と組み合わせあって一部の学生には物理の三角関数は解らないという思い込みを生じさせている。

図3は学習到達度試験に出題された仕事を計算する問題である、誤答の解析から $\cos 60^\circ$ と $\sin 60^\circ$ を取り違えて回答した学生の割合を推定でき、16%（正答は62%）であった。少なくとも16%の学生は明らかに取り違えている。残りの不正解の22%の学生はそれ以前の可能性も高く、少なく見て3割程度の学生は3年生終了時において三角関数を物理の場面で正しく使えないと推測される。

以上、誤計算について7つの類型を説明した。

3. 関連する問題

誤計算ではないが、物理学習上、好ましくないと考えられる例を挙げる。

例 1. 未知数 x へのこだわり

これは1クラスに必ず数名いるので注意が必要で

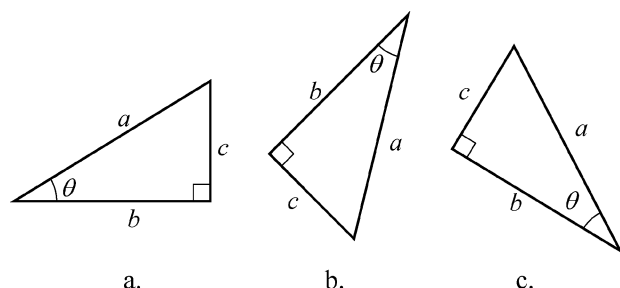


図2 直角三角形の変形による sin と cos の取り違い

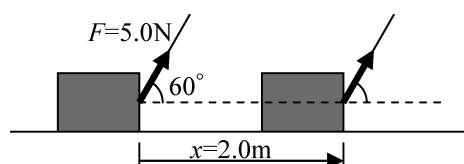


図3 仕事計算の問題 $W = Fx \cos 60^\circ$

ある。例えば、高さ h から自由落下した物体が地面に衝突するときの速度 v を求める場合、速度を未知数としてこれを x で表すことにこだわる学生がいる。すなわち、

$$mgh = \frac{1}{2} mx^2 \quad \dots (17)$$

と式を立てるのである。なんら間違いではないが、物理量を表す単語の頭文字を用いて数式を解り易くする習慣上、無関係な文字を使うと判り辛くなる。また、計算の見通しが悪く、次元解析が困難になるので避けたい。数学では未知数 x で訓練を受けるため、慣れないうちは頭文字を用いる物理の表式では求めたいものが判らなくなることが原因らしい。

例 2. 数値代入のタイミング

ほとんどの学生は連立方程式でも立式の直後に数値を代入し計算を進める。数式のまま解を求め、最後に数値を代入するように指導しているが、残念ながらこの方法に従う学生は少ない。初めから数値を代入すると次元解析が不能になり計算ミスのチェックができない。また、有効数字の確認ができなくなるので好ましくない。

例 3. 経験から来る誤概念

物理学習の固有の問題であるが、ベクトルなどの数学の学習をベースにして論理的に修正可能と思われるが現実にはそうっていない。逆に物理の誤概念のために数学の理解を妨げている、もしくは無関係として認識させている可能性が高い。図4は、力学的感覚が学習進展と共にどのように変わるかを調べるための力学クイズの中の一問である²⁾。O点から斜面を転がり空中に飛び出す玉が各点で受ける力を矢印で描き込む問題である。摩擦は一切無視の条件である。

正答率は、2年生修了時6%、3年生終了時13%、4年生終了時19%である。典型的な誤答は、玉の進行方向に矢印を描くもので、少し気の利いた誤答では重力が付加されるが、空中を飛んでいるときは重力は描かれないことが多い。4年生19%は理工系大学生と比較して遜色の無い高い数値である。それほど経験から習得した物理誤概念は根深く、授業で勉強しただけでは簡単には払拭できないらしいことが判る。本来ならば2年生終了時には100%の正答

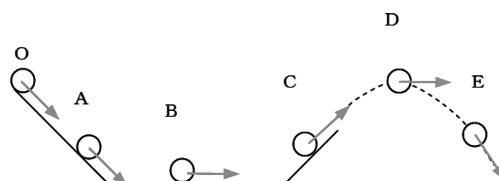


図4 物体に働く力を描き込む問題。図のように移動方向に矢印を付与するのが典型的な誤等

を期待したいところである。これは物理教育で達成すべき挑戦目標のひとつである。

このクイズの正答率から判ることは、物体に働く力を正確に把握できる学生は極めて限られるということで、結果、運動方程式の立式が可能な学生の割合はこの数値に留まる。4年生になっても運動方程式すら立てられないとの専門学科の先生方の嘆きを耳にするが、これは本校に限った事ではない。進行方向に力を加え続けないと物体は前に進まないと固く信じて疑わない人が普通であり、分析的に運動方程式を正しく記述できる人は特殊な才能を獲得した貴重な人材と捕らえるべきだろう。

4. 誤計算への対処

誤計算の類型を分類した表を図5に示す。誤計算は単独で表れることは稀で複合した形で同時多発的に表れることが普通である。定期試験の場合、誤答であることを認識しながら、類型5に示したその場しのぎの記述を強いられる精神状態になるのかもしれない。そのため本報告に抽出した誤計算がすべて本質的に重大な誤計算の類型であるとは断言できないが、正解にたどり着けない点では同じである。正解にたどり着くことで得られる快感が報酬となって学習が強化されるという考えに立つと、訓練として行っている物理学習が誤計算で重篤に阻害されている現状が了解される。抽出された誤計算の類型を個々に見ると凡ミスであることがわかる。学生に誤計算の類型を認識させ、これを避ける工夫を示すことで、物理学習の障害要因の一つを軽減することができると期待される。

類型2の分配則のミスや分数に関わる誤計算、類型1の方程式の解法のミス、類型7の三角関数に関わる誤計算、ならびに類型4は、理屈の裏付けの無い形式的な処理が原因である。したがって、処理の意味を解って計算を実行することを徹底する指導が肝要である。ただし残念ながら授業で大勢に向かっ

て説明しても改善は期待できない。なぜなら本人には誤計算している認識が無いからである。効率は悪いが個別に具体的な答案で一人一人に対して間違いを指摘し、正しい計算処理を指導することが必要である。個別指導のため手間はかかるが、実際この指導で劇的に物理の理解が深まる学生がいる。

類型3の同時処理、類型6の文字の変化による誤計算は、全員に通じ解説する必要のある項目であると思われる。類型1にも関わるが、方程式の等号と代入や定義の等号は異なることを認識させることは重要であると考えている。文字の書き方については具体的に混乱の避け方を教えている。そのため、英小文字の筆記体とギリシャ文字の手書きを授業で指導している。これらは学習者が自身で認識し工夫するとは期待できない。速い段階で知識として提供する必要を感じる。

5. ま と め

物理答案に頻出する誤計算の類型を分析し、物理学習の障害要因を軽減するための基礎資料とした。授業での指導へ活用すると共に、今回、定性的な分析に留まっている誤計算の類型を定量的に扱えるよう検討を進めたい。平成21年度の1年生から物理が導入され、本報告の分析を基に1年生の物理授業では計算の指導に工夫をしている。前期中間試験ではこれまでとは異なる誤計算が見られ興味深い。1年生の授業を通じて分析を進めると同時に指導の検証を行う。

参 考 文 献

- 1) 佐藤誠：物理答案に頻出する計算間違い，数学教育の会，2008年夏の研究会，13-14, Sep., 2008，学習院大学，東京，
<http://www-cc.gakushuin.ac.jp/~851051/maed/09sato.pdf>
- 2) 飯田洋治：こう教えればもっとわかる“運動の法則”，パリティ，19, 9 (2004) 56-60

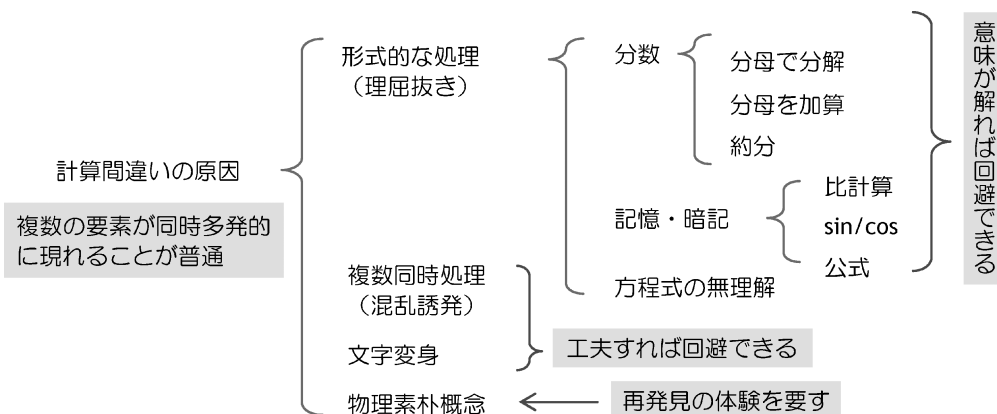


図5 物理答案に見られる誤計算の分類