

ランダム行列理論を用いた有限密度格子QCDの研究

佐々井祐二*

中村 純†

高石哲弥‡

Gernot Akemann§

Study of Finite Density Lattice QCD using Random Matrix Theory

Yuji SASAI, Atsushi NAKAMURA, Tetsuya TAKAISHI and Gernot AKEMANN

The comparison between unquenched SU(3) Lattice QCD and random matrix theory can provide information on the pion decay constant F_π . We calculated eigenvalue distributions of Dirac operator on $8^3 \times 4$ lattice using $N_f = 2$ Kogut-Susskind fermions. We performed fits between these lattice data and the spectral density of random matrix theory at coupling $\beta = 5.30$ and iso-vector chemical potential $\mu a = 0.0, 0.004773, 0.1$ and 0.2 , and then find good agreement. Especially our data indicates that F_π decreases as the iso-vector chemical potential increases. For more precise fit of α parameter, we also compare the first eigenvalue distribution of random matrix theory to unquenched lattice data.

Key words: Lattice gauge theory, Random matrix theory, Dirac spectra

1. Introduction

非摂動領域の情報を得るための正則化の方法として、格子間隔 a と 4 次元体積 V を持つ格子量子色力学 (QCD : Quantum ChromoDynamics) がある。宇宙初期や中性子星内部、重イオン衝突などの有限密度においては、バリオン数化学ポテンシャルが導入される。このとき SU(3) 格子 QCD では、ディラック行列式が複素数となってしまう、符号問題が発生し、ゲージ配位をボルツマンの重みで生成する通常のモンテカルロ法が使用できなくなる。しかし、ディラック行列式を無視するクエンチの手法の他に、位相を無視しディラック行列式の絶対値を測度に加える位相クエンチの手法がある¹⁻³⁾。この場合、アイソスピン化学ポテンシャル μa を導入していることになる。格子 QCD ではこのディラック演算子の固有値分布を調べることができる。

ϵ -領域における QCD はカイラルランダム行列理論 (RMT : Random Matrix Theory)^{4,5)} で記述することができる。RMT は多くの厳密で解析的な結果を導出することができる。その一番重要な測定量はスペクトル密度相関関数である。最小固有値のスペクトル密度相関関数と格子 QCD の結果とを比較することにより、低エネルギー物理定数として、カイラル凝縮 Σ とパイオン崩壊定数 F_π を引き出すことが期待されている。 $\mu a = 0$ では、ディラック演算子は反エルミートであり、そのスペクトルは虚軸上に分布する。しかし、 $\mu a \neq 0$ では、 μa の増大と共に、スペクトルは実軸方向に広がっていく。このとき、ディラック演算子

は非エルミートとなる。

$\mu a \neq 0$ におけるディラック演算子の (クエンチと非クエンチの) スペクトル密度相関関数は Osborn⁶⁾, Akemann 他⁷⁾, Splittoroff 他⁸⁾ のカイラル RMT で計算された。また、Kogut-Susskind (KS) フェルミオン^{9,10)} あるいは overlap フェルミオン¹¹⁾ を用いたクエンチの格子 QCD データとスペクトル密度相関関数との比較についても行われている。格子 QCD において、overlap フェルミオンは Ginsparg-Wilson 関係式を満足し、厳密なカイラル対称性と厳密な 0 モードを持ち、インデックス定理を満足するが、膨大な計算機リソースを必要とし、ゲージ配位を溜めるのが難しい。

$\mu a \approx 0$ では、スペクトルは原点近傍の虚軸方向で振動している。このとき、格子 QCD のデータとカイラル RMT の結果のチューニングをかなり厳密に行うことができる。しかし、 μa の増大と共にこの振動はなくなる。そこで、個別の固有値分布を比較することが必要となる。 $\mu a = 0$ では、全ての個別の固有値分布関数が解析的に求められる^{12,13)}。Akemann 他は、 $\mu a \neq 0$ における QCD ディラック演算子の個別の (クエンチと非クエンチの) 固有値密度分布関数を RMT から導出した^{14,15)}。

本稿で、我々はアイソスピン化学ポテンシャルにおける SU(3) 格子 QCD の非クエンチの固有値データとカイラル RMT のスペクトル密度関数との比較を行い、パイオン崩壊定数 F_π の μa 依存性を調べる。この比較の際に重要なのが、 $\mu a \neq 0$ の格子 QCD におけるディラック演算子の固有値の平均準位間隔 (mean level spacing) d の定義である。 $\mu a = 0$ の場合は、固有値は虚軸上に 1 次元的に分布するので、その並び順で固有値間隔を考えればよい。 $\mu a \neq 0$ では固有値

* 津山工業高等専門学校 専門学科共通科目

† 広島大学

‡ 広島経済大学

§ Brunell University

は2次元的に分布するが、Banks-Casher 関係式を考慮に入れて、虚軸上に射影された固有値の値 (虚数成分) の並び順で、固有値間隔を考えた。また、原点近傍の最小固有値について、格子 QCD データの固有値密度と RMT の固有値分布関数との比較を試みる。

2. Lattice Gauge Theory (LGT)

熱力学系は分配関数

$$Z = \int DU D\bar{\psi} D\psi \exp\left[-\int_0^{1/kT} d\tau \int d^3x (L + \mu\bar{\psi}\gamma_4\psi)\right] \\ = \int DU (\det \Delta(\mu))^{N_f/4} e^{-\beta S_g} \quad (1)$$

で記述される。ここで、 k はボルツマン定数、 T は温度、 N_f はフレーバー数、 μ は化学ポテンシャル、 $\beta = 6/g^2$ は結合定数、 S_g はゲージ作用である。また、ゲージ場 (クォーク) に対応する格子上のリンク (サイト) 変数 $U(\psi)$ に対しては周期的 (非周期的) 境界条件を課している。

我々は、格子上でゲージ場の配位の統計数を増やすため KS フェルミオンを採用している。 $\mu = 0$ であれば、フェルミオン行列式 $\det \Delta(\mu)$ は正実数となり数値計算は実行可能であるが、 $\mu \neq 0$ であれば、 $\det \Delta(\mu)$ は複素数 $|\det \Delta(\mu)| e^{i\theta}$ となり、モンテカルロ計算におけるゲージ場の配位のアップデートの積分測度に位相 $e^{i\theta}$ が入るため、計算は困難となる。

そこで、モンテカルロシミュレーションにおいて、 $N_f = 2$ におけるオペレーター O の期待値として、クエンチ測度では

$$\langle O \rangle_0 = \frac{1}{Z} \int DU O e^{-\beta S_g} \quad (2)$$

を取り扱う。また、アイソスピン化学ポテンシャルでは位相は入らないから、非クエンチ測度として

$$\langle O \rangle = \frac{1}{Z} \int DU |\det \Delta|^{1/2} O e^{-\beta S_g} \quad (3)$$

を取り扱う。

3. Random Matrix Theory (RMT)

ゲージ場中でのクォークが満足するディラック方程式の固有関数の基底をカイラル基底にとりこれをランダム行列で取り扱うものがカイラルランダム行列理論である。 $\mu \neq 0$ における RMT の分配関数は

$$Z = \int dA dB \exp\{-N \text{Tr} (AA^\dagger + BB^\dagger)\} \\ \times \prod_{f=1}^{N_f} \det \begin{pmatrix} m_f & iA + \hat{\mu}B \\ iA^\dagger + \hat{\mu}B^\dagger & m_f \end{pmatrix}, \quad (4)$$

ここで、 A と B は $N \times N$ の複素行列 (ただし、トポロジカルチャージ $\nu = 0$)、 $\hat{\mu}$ は RMT における化学ポ

テンシャルである。また、分配関数 Z はディラック演算子の N 個の固有値 z_j で書けるが、対称性 $z \leftrightarrow -z$ により、積分領域として複素上半平面 $\mathbb{C}_+$ のみを考えている。ディラック演算子に Schur 分解を行い、複素対角成分 $\text{diag}(z_1, \dots, z_N)$ 以外の自由度を積分することにより次の式を得る

$$Z = \prod_{j=1}^N \int_{\mathbb{C}_+} d^2 z_j \mathcal{P}(\{z\}). \quad (5)$$

ここで $\mathcal{P}(\{z\})$ は同時確率分布関数であり、以下で与えられる

$$\mathcal{P}(\{z\}) = \prod_{j=1}^N w^{(N_f)}(z_j) |\Delta_N(z^2)|^2, \quad (6)$$

ここで、Vandermonde 行列式 $\Delta_N(z^2) = \prod_{i>j=1}^N (z_i^2 - z_j^2)$ が出てくる。また、重み w はクォークのフレーバー N_f と質量 m_f ($f = 1, \dots, N_f$) に依存する、

$$w^{(N_f)}(z_j) = \prod_{f=1}^{N_f} (m_f^2 - z_j^2) |z_j|^2 \\ \times K_0 \left(\frac{N(1 + \hat{\mu}^2)}{2\hat{\mu}^2} |z_j|^2 \right) e^{\frac{N(\hat{\mu}^2 - 1)}{4\hat{\mu}^2} (z_j^2 + z_j^{*2})}, \quad (7)$$

ここで、 K_0 は第2種変形 Bessel 関数である。

次に、複素固有値密度相関関数は次のように定義される

$$R_k(z_1, \dots, z_k) \equiv \frac{1}{Z} \frac{N!}{(N-k)!} \prod_{j=k+1}^N \int_{\mathbb{C}_+} d^2 z_j \mathcal{P}(\{z\}). \quad (8)$$

このとき、 $R_1(z)$ はスペクトル密度関数である。式 (7) の w を重みとする直交多項式の方法により^{6,7)}、複素固有値密度相関関数は次のように書かれる、

$$R_k(z_1, \dots, z_k) = \prod_{l=1}^k w^{(N_f)}(z_l) \frac{\det_{1 \leq i, j \leq k} K_N(z_i, z_j^*)}{\det_{1 \leq i, j \leq k} \mathcal{K}_N(z_i, z_j^*)}, \quad (9)$$

ここで、核 $K_N(z_i, z_j^*)$, $\mathcal{K}_N(z_i, z_j^*)$ は双直交多項式 (Laguerre 多項式) で書くことができる。

体積 V 無限大の極限では、RMT は ϵ -領域における QCD と等価である¹⁶⁾。この領域において、我々はディラック固有値、クォーク質量、化学ポテンシャルをリスケールさせる： $\xi_i \equiv N z_i (= V \Sigma z_i)$, $\eta_f \equiv N m_f (= V \Sigma m_f)$, $\alpha^2 \equiv 2N \hat{\mu}^2 (= V F_\pi^2 \mu^2)$ (ここで、体積 V (ディラック演算子の階数 N) 無限大の極限において、この積の値は保持される)。具体的には、固有値、質量のリスケール関係式は次のようになる

$$\xi_i = \frac{\pi}{d} \cdot z_i, \quad \eta_f = \frac{\pi}{d} \cdot m_f. \quad (10)$$

ここで、 d は Banks-Casher 関係式を抛り所とする平均準位間隔である。クエンチの場合の微視的スペクトル核は次のように与えられる^{6,7)},

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_s(\xi_1, \xi_2^*) &= \frac{1}{2\pi\alpha^2} |\xi_1 \xi_2| K_0\left(\frac{|\xi_1|^2}{4\alpha^2}\right)^{\frac{1}{2}} K_0\left(\frac{|\xi_2|^2}{4\alpha^2}\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\times \exp\left[-\frac{\text{Re}(\xi_1^2 + \xi_2^2)}{8\alpha^2}\right] \int_0^1 dt e^{-2\alpha^2 t} I_0(\xi_1 t) I_0(\xi_2^* t), \end{aligned} \quad (11)$$

ここで、 I_0 は第 1 種変形 Bessel 関数であり、微視的スペクトル密度は $\hat{\rho}_1(\xi) = \mathcal{X}_s(\xi, \xi^*)$ で与えられる。我々が比較を試みる格子データはフレーバー数 $N_f = 2$, $\eta \equiv \eta_1 = \eta_2$ であり、対応する非クエンチ RMT の微視的スペクトル密度は次のように与えられる

$$\hat{\rho}^{(N_f=2)}(\xi) = \hat{\rho}_1(\xi) \left(1 - \frac{|\mathcal{X}_s(\xi, \eta^*)|^2}{\mathcal{X}_s(\eta, \eta^*) \mathcal{X}_s(\xi, \xi^*)}\right). \quad (12)$$

4. Comparison of lattice data and RMT

我々は、RMT において格子データを再現できるようなパラメータを調べ、対応する物理を見つけたい。そのために LGT の固有値密度関数 $\rho(z)$ と RMT の微視的スペクトル密度 $\hat{\rho}^{(N_f=2)}(\xi)$ とを比較し、対応関係を調べることが必要となる。

LGT 計算について、ゲージ配位生成は、R-アルゴリズムを用いて、 $8^3 \times 4$ 格子、 $N_f = 2$, $\beta = 5.30$, $ma = 0.05$ において行った。次に、これらのゲージ配位に対して固有値を計算することが問題となる。LAPACK を用いて全固有値を計算するには非常に時間が掛かる。我々は RMT では微視的極限として弱非エルミート極限を取ることで、固有値分布の中心近傍の固有値が必要である。従って、ディラック演算子の固有値については、絶対値の昇順に 100 個ずつ計算できればよい。そのため、LU 分解と ARPACK を用いた。この場合、ゲージ配位 1 個当たり短時間で計算できるので、5,000 ~ 15,000 配位分の固有値を計算した。次に、これらの固有値データの統計平均により、固有値密度を計算した。しかし、RMT の記法に合わせるため、固有値密度関数を $\int dx dy \rho(x, y) = N = N_c \times 8^3 \times 4 = 6144$ と正規化している。これは、後述する RMT の個別の固有値密度分布関数 $p_k(\xi)$ を 1 に正規化しているためである。

格子データと RMT の比較のために、平均準位間隔 d が非常に重要である。 $\mu a = 0$ の場合、固有値は虚軸上に分布する。Banks-Casher 関係式、

$$\Sigma = \langle \bar{\psi} \psi \rangle = -\frac{\pi \rho(0)}{V} = -\frac{\pi}{Vd} \quad (13)$$

には中心近傍の固有値密度が含まれるので、虚軸上に並んだ固有値の平均間隔 d を計算すればよい。しかし、 $\mu a \neq 0$ の場合、複素固有値は 2 次的に広が

Table 1. Summary of simulation parameters ($\beta = 5.30$, $V = 8^3 \times 4$)

μa	level spacing d	no. of config.
0.0	$2.57(4) \times 10^{-3}$	5,000
0.004773	$2.64(4) \times 10^{-3}$	15,000
0.10	$2.73(4) \times 10^{-3}$	15,000
0.20	$4.3(2) \times 10^{-3}$	10,000

り、その並び順をどう定義するかが問題となる。ここでは弱非エルミート極限のため、複素固有値を虚軸上に射影させ、中心付近の数個の固有値の平均間隔を測定し、これを d とする。 $\mu a = 0, 0.004776, 0.1$ では、 d の最小固有値数による変化は小さいが、大きな μa ではその変化は大きくなる。また、クエンチにおけるチェックのため、 $V = 6^4$, $\beta = 5.0$, $\mu a = 0.006$ ($\alpha = 0.20$) の条件で格子データと RMT との比較を行い、Akemann と Wettig の結果¹⁷⁾ との一致を確認した。

以下、化学ポテンシャル $\mu a = 0.1$ の場合について、LGT と RMT の対応関係を調べる。

1. 平均準位間隔 d を計算し、格子データをリスケールする。今の場合、 $d = 2.73(4) \times 10^{-3}$ であるので、ゲージ配位 15,000 個分の固有値の統計平均により得られた固有値密度関数 $\rho(za)$ の固有値 za を、式 (10) により $\pi/d = 1.15(2) \times 10^3$ 倍リスケールさせた値を ξ とする。
2. 質量 ma を同様にリスケールさせて $\eta = 57.6$ とする。ここまでは一意的に決まる。
3. 計算した質量 η と適当な α の値を入力し RMT で計算する。実軸（虚軸）方向で分布幅やピーク、プラトーが合うように $\alpha = 1.68$ を決め、このとき虚軸（実軸）方向もグラフが重なるように調節する (図 1, 図 2)。

統計の関係でヒストグラムの幅が大きいですが、図 2 より、LGT (非クエンチ) の結果と RMT の結果は正規化未調節、 α のみフリーパラメータとしてよく一

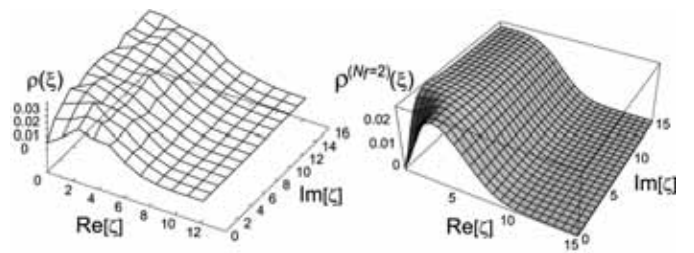


Figure 1. Density of small Dirac eigenvalue: $\mu a = 0.1$, $\beta = 5.30$ and $ma = 0.05$ (left), $\alpha = 1.68$ and $\eta = 57.6$ (right). $\alpha = 1.68$ and $\eta = 57.6$.

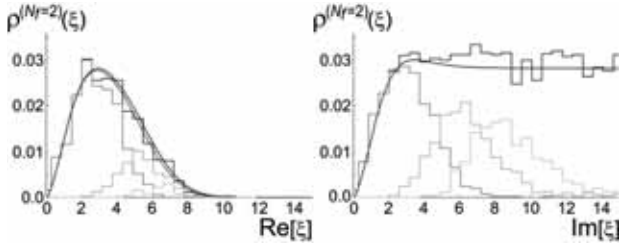


Figure 2. The eigenvalue density distribution at $\mu a = 0.10$ along the real axis (left) and the imaginary axis (right). The histogram in black is the lattice data (unquench). Red, green and light-blue histograms stand for the first, the second and the third eigenvalue density distribution (lattice). A blue (black) curve corresponds to RMT unquench (quench) result. $\alpha = 1.68$ and $\eta = 57.6$.

致している。 $\mu a = 0.10$ はディラック行列式の絶対値の効果の小さい低密度領域であり、LGT(非クエンチ)の結果がRMTのクエンチでなく非クエンチに対応しているか判断できない。また、RMTの結果からも、ディラック行列式の絶対値の効果は固有値空間の虚軸ではなく、実軸方向に現れることが分かる。格子データの第1固有値、第2固有値、第3固有値のヒストグラムについても掲載した。図3に、 α パラメータのチューニングの様子を示す。

次に、化学ポテンシャル $\mu a = 0.0$ の場合について、格子データとRMTの対応関係を調べる。化学ポテンシャルがないので、格子データの固有値は虚軸上に分布する。この場合、非クエンチQCDはfull QCDに対応し、式(11)は $\alpha \rightarrow 0$ において、次の簡単な形式となる、

$$\hat{\rho}_1(\xi) = \text{Re}(\xi) \int_0^1 dt e^{-2\alpha^2 t} I_0(\xi t) I_0(\xi^* t), \quad (14)$$

ここで、full 格子QCDデータとRMTの比較の結果を、図4に示す。正規化未調節、フリーパラメータなし、ゲージ配位の統計が少ないにも関わらず、最初のピーク3個は良く一致している。

化学ポテンシャル $\mu a = 2.0$ の場合について、格子QCDデータとRMTの比較の結果を、図5に示す。

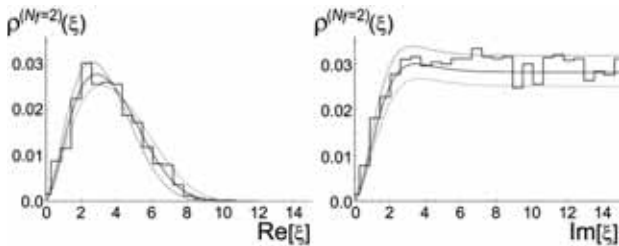


Figure 3. This is for tuning of the parameter α . Green, blue and light-blue curves correspond $\alpha = 1.58, 1.68$ and 1.78 , respectively.

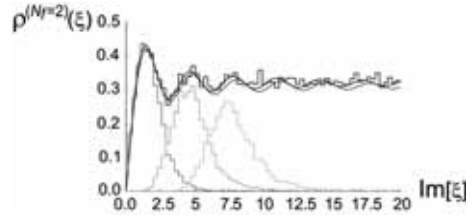


Figure 4. Eigen value density distribution along the imaginary axis. The histogram in black is lattice data (full QCD) at $\mu a = 0.0$. There is no free parameter. The other is same as Fig.2.

RMTの結果から、この密度領域ではディラック行列式の効果を実軸方向のピークの外側に現れることが分かる。また、 $\beta = 5.30 \approx \beta_c = 5.29(9)$ であるので¹⁸⁾、ほとんど臨界点直上であるが、 α パラメータのチューニングにより、格子QCDデータとRMTをフィットできている。

幾つか α のフィット値が得られた。 $\alpha/\mu a = F_\pi/\sqrt{V}$ であるので、 $\alpha/\mu a$ を計算することにより、パイオン崩壊定数 F_π の密度変化を推定することができる。その結果を表2に示す。 $\mu a = 0.0, 0.004773, 0.10$ では、結合定数 $\beta = 5.30$ はそれぞれの β_c より小さく、これらの密度領域は閉じ込め相である。また、カイラル凝縮 Σ の値も余り変化はなく、 $\alpha_{fit}/\mu a$ も余り変化はない。しかし、臨界点直上である $\mu a = 0.20$ では、 Σ の値が下がり、 $\alpha_{fit}/\mu a$ も下がっている。従って、 $\mu_c a$ に近づくにつれ、 F_π の値が減少する傾向を示していることが分かる。

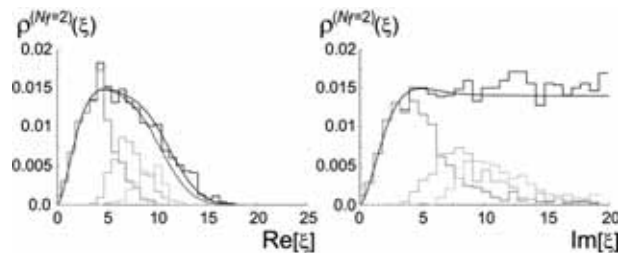


Figure 5. Same as Fig.2, but for $\mu a = 0.20$, $\alpha = 2.38$ and $\eta = 36.2$.

Table 2. Estimation of F_π as μa increases.

μa	α_{fit}	$\alpha_{fit}/\mu a$
0.0	none	none
0.004773	0.08	16.8
0.10	1.68	16.8
0.20	2.38	11.9

5. First eigenvalue distribution for complex eigenvalues

上述のように、 $\mu a \approx 0$ の低密度領域では、LGT の固有値密度関数 $\rho(\xi)$ と RMT の微視的スペクトル密度 $\hat{\rho}^{(N_f=2)}(\xi)$ に振動が現れ、そのフィットを厳密に行うことができる。しかし、 μa の増大につれ、振動は見られなくなる。そこで、個別の固有値分布を比較することが重要となる。

ギャップ確率と k 番目の固有値分布関数 $p_k(\xi)$ の定義の関係から、RMT における第 1 固有値分布関数 $p_1(\xi)$ は次のように得られる^{14,15)}

$$p_1(\xi) = R_1(\xi) - \int_J d\xi' R_2(\xi, \xi') + \frac{1}{2} \int_J d\xi' d\xi'' R_3(\xi, \xi', \xi'') + \dots, \quad (15)$$

ここで、1 個の固有値が領域 J にあり、 $N-1$ 個の固有値が補領域 $\bar{J} \equiv \mathbb{C}_+ / J$ にあるとしている。式 (9) より、 R_k ($k = 1, 2$) は次の式で与えられる

$$\begin{aligned} R_1(\xi) &= \mathcal{X}_s(\xi, \xi^*) \\ R_2(\xi, \xi') &= \mathcal{X}_s(\xi, \xi^*) \mathcal{X}_s(\xi', \xi'^*) - \mathcal{X}_s(\xi, \xi'^*) \mathcal{X}_s(\xi', \xi^*). \end{aligned} \quad (16)$$

ここでは $\mu a = 0.10$ の場合について、格子データの第 1 固有値密度関数とクエンチ RMT の第 1 固有値分布関数 $p_1(\xi)$ を図 6 に掲載する。ただし、計算の収束時間の関係で、式 (15) の右辺第 2 項までで近似をしているが、実軸、虚軸方向とも第 3 固有値の相関が強くなる 5.0 付近まで、これらヒストグラムと曲線とは良く一致している。

6. Summary

我々は $8^3 \times 4$ 格子上で $N_f = 2$, $ma = 0.05$, 非クエンチ (アイソスピン化学ポテンシャル) ゲージ配位を計算している。ディラック演算子の固有値空間の様相の解析のため、その固有値分布と RMT との比較を試みた。 $\mu a = 0.0$ の場合、我々は full QCD ゲー

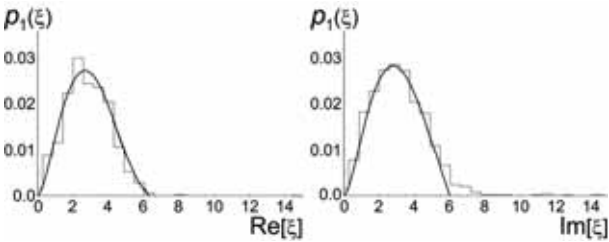


Figure 6. In the case of $\mu a = 0.10$, the red histogram stands for the first eigenvalue density distribution in LGT (unquench). The black line is the first eigenvalue distribution $p_1(\xi)$ by RMT (quench).

ジ配位を持っていて、そこではフリーパラメータはない。格子データの最初の 3 つのピークは非クエンチ RMT の計算と良く一致している。 $\mu a = 0.004773$, 0.10, 0.20 では、 α パラメータの調節のみで RMT グラフを格子データにフィットさせることができる。また、これらの密度領域で、パイオン崩壊定数 F_π の変化を調べ、 $\mu a = 0.004773$, 0.1 (非閉じ込め相) における F_π は、 $\mu a = 0.20$ (殆ど臨界点直上) における F_π よりも大きい、つまり、 μ_c に近づくにつれ、 F_π は小さくなるようである。密度領域ではスペクトル密度関数に振動がないため、 α パラメータの厳密なチューニングが行いにくい。そこで、準備計算として、 $\mu a = 0.10$ の場合に、格子データの第 1 固有値密度関数と RMT の第 1 固有値分布関数 $p_1(\xi)$ の比較を行い、良い一致を得た。

Acknowledgments

本数値計算は大阪大学核物理研究センター (RCNP) のベクトル型計算機 NEC SX-8 と広島大学のスカラー型計算機 日立 SR-11000 によりなされました。また、YS は 2007 年度 津山工業高等専門学校傾斜配分枠研究経費を受けました。ここに深謝いたします。

References

- 1) S. Muroya, A. Nakamura, C. Nonaka and T. Takaishi, Prog.Theor.Phys.**110** (2003) 615 [hep-lat/030631].
- 2) A. Nakamura, Y. Sasai and T. Takaishi, Nucl. Phys. (Proc. Suppl.) **129-130C** (2004) 539 [hep-lat/0310046].
- 3) A. Nakamura, Y. Sasai and T. Takaishi, AIP Conf. Proc. **756** (2005) 416.
- 4) E. V. Shuryak and J. J. M. Verbaarschot, Nucl. Phys. **A560** (1993) 306 [hep-th/9212088].
- 5) J. J. M. Verbaarschot, Phys. Rev. Lett. **72** (1994) 2531 [hep-th/9401059].
- 6) J. C. Osborn, Phys. Rev. Lett. **93** (2004) 222001.
- 7) G. Akemann, J. C. Osborn, K. Splittorff, and J. J. M. Verbaarschot, Nucl. Phys. **B712** (2005) 287.
- 8) K. Splittorff and J. J. M. Verbaarschot, Nucl. Phys. **B683** (2004) 467.
- 9) G. Akemann and T. Wettig, Phys. Rev. Lett. **92** (2004) 102002 [Erratum-ibid. **96** (2006) 029902] [hep-lat/0308003].
- 10) J. C. Osborn and T. Wettig, PoS **LAT2005** (2006) 200 [hep-lat/0510115].
- 11) J. Bloch and T. Wettig, Phys. Rev. Lett. **97** (2006) 012003 [hep-lat/0604020].
- 12) S. M. Nishigaki, P. H. Damgaard and T. Wettig, Phys. Rev. **D58** (1998) 087704 [hep-th/9803007].
- 13) P.H. Damgaard and S.M. Nishigaki, Phys. Rev. **D63** (2001) 045012 [arXiv:hep-th/0006111v2].
- 14) G. Akemann, J. Bloch, L. Shifrin, T. Wettig, Phys. Rev. Lett. **100** (2008) 032002; [arXiv:0710.2865v2 [hep-lat]].
- 15) G. Akemann, J. Bloch, L. Shifrin, T. Wettig, PoS **LAT2007** (2007) 224; [arXiv:0711.0629 [hep-lat]].
- 16) F. Basile and G. Akemann, JHEP **12** (2007) 043.
- 17) G. Akemann and T. Wettig, Phys. Rev. Lett. **92** (2004) 102002; [hep-lat/0308003].
- 18) J.B. Kogut, D.K. Sinclair, Phys. Rev. **D70** (2004) 094501; [hep-lat/0407027].

