

月の落下に要する時間

佐藤誠*

How many days does it take if the moon falls to the Earth?

Makoto SATO

The moon goes around the Earth with a period of about 4 weeks. If the relative velocity of the moon to the Earth suddenly became zero, how many days would it take the moon falls and collides with the Earth? This simple question is unexpectedly beyond the high-school level physics. In this report, a numerical computation and an analytical solution are presented which 4th grade students performed in the Mathematical Science I class as free theme studies.

Key words : the moon, the Earth, Newton's law of gravity, the equation of motion

1. はじめに

ことのはじまりは、桜井邦朋著「物の理」¹⁾に記載された次の一節に疑問を感じたことからである。

「月も地球の周囲を公転しているが、実は常に地球に向かって自然落下の状態にある。もしこの横すべりの運動がなかったら、月は地球に向かって垂直に落ちてきて、一週間ほどで地球に衝突するはずなのである。月が横すべりしているために、一週間ほどすると、真上に見えた月は九〇度回って横方向に見えるようになる。この時間の一致が何を意味するのか、じっくり考えてみていただきたい。」

この啓蒙書は現代物理全般に渡り、物理学の重要な考え方をコンパクトに教えてくれる好著である。また、上記のような示唆に富む指摘も随所に見られ読者の知的興味を喚起してくれる。物理好きの学生にぜひ読んでもらいたい一冊である。

月は約4週間で地球を一巡りするので1/4周するのに1週間ほどかかる。月が公転をせずに地球に対して軌道の位置から自由落下すると、この1週間と同じ時間で地球に落下するという推測である。つまり、横方向（円周に沿った方向）と動径方向（重力の方向）とに分けて考えれば真上の月が真横に来るのと垂直に落ちてくるのと同じ時間であるということである。

なるほどと感心される方もおられるかもしれないが、この考え方は少しおかしい。図1を参照いただきたい。月にはたらく重力は軌道半径が一定であれ

ば大きさ一定である、真上から横方向に移動すれば、図の上下方向（重力方向の意味ではない）の重力は減少する。一方、もし、垂直に落下してくると、地球に接近すればするほど重力は増大してくる。したがって、月が地球に激突するまでの時間は明らかに、月が公転軌道を1/4周する時間つまり1週間より短いはずである。

4年生の選択科目「数理科学I」においてこの話を紹介し、月が落下するに要する時間を計算することを課題研究テーマとして取り上げることを提案したところ2名が参加してくれた。

彼らは、万有引力の法則および微分方程式としての運動方程式を3年生の応用物理Iで学ぶので、運動方程式を立てることに困難はない。地球の中心を原点として、月の中心までの距離を r とすると、運

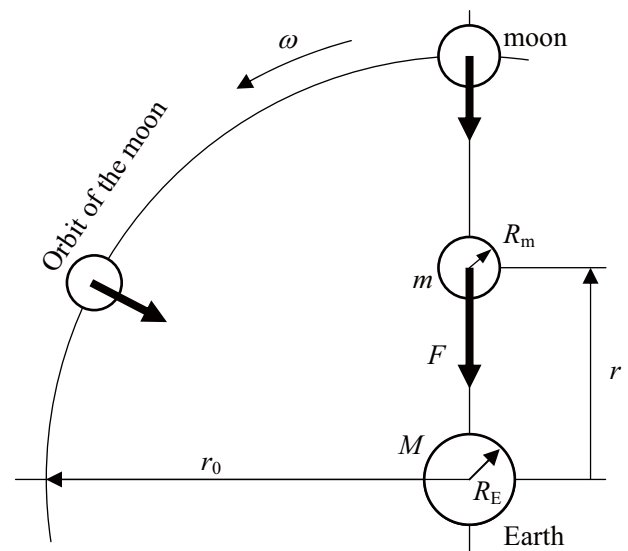


Fig. 1 The moon and the Earth.

原稿受付 平成19年8月31日

*一般科目 satom@tsuyama-ct.ac.jp

動方程式は、次式に表される。

$$m \frac{d^2 r}{dt^2} = -G \frac{mM}{r^2} \quad \dots (1)$$

ここで、 m は月の質量、 M は地球の質量、 G は万有引力定数である。この微分方程式は速度については位置 r を変数にして簡単に解くことができる。このことは重力が保存力のため力学的エネルギー保存則をもとに計算できることから容易に分る。しかし、速度の時間変化、位置の時間変化を解析的に求めることは難しい。一見簡単そうに見える問題設定であるが、この積分を行うことはおそらく4年生の平均的な数学の能力を超えている。実際、大学初学年を対象とした物理の教科書や問題集でこの計算を取り扱ったものは見当たらない。激突する速度を力学的エネルギー保存則から計算させる問題に留まっている。2名の学生にはそれぞれ数値計算による方法と、解析解を求める方法とに分けて取り組んでもらうことにした。数値解が得られれば上出来であろうとの目論見である。

本報告では、2名の学生のレポートをもとに数値計算の方法と、解析解の求め方を解説し、両者の結果の比較を行う。本報告の内容は学生が自律的に行うテーマとして適当で興味深い。また、類似の力学系に適用して議論の幅を広げることが可能である。

2. 数値計算の方法

まず、数値計算の方法について説明する。式(1)の運動方程式より、距離が r における加速度 a は、

$$a = -g \frac{R_E^2}{r^2} \quad \dots (2)$$

と表せる。ここで、 g は地表での重力加速度であり、 $GM=gR_E^2$ の関係を用いた。時刻 t における速度を v 、位置を r とすると、 Δt ほど時間が経過したときの速度 v' 、位置 r' は次のように表される。

$$v' = v + a \Delta t \quad \dots (3)$$

$$r' = r + v \Delta t \quad \dots (4)$$

したがって、時刻 $t=0$ における位置と速度、および加速度を与え、時刻を Δt づつ増加させながら各時刻における速度 v と位置 r を順次計算する。これは運動方程式を数値計算で解く際の一般的な手法で、加速度 a がどのような関数であっても一意に決まるものであれば適用できる。すなわち、物体に働く力が定義できれば計算可能である。

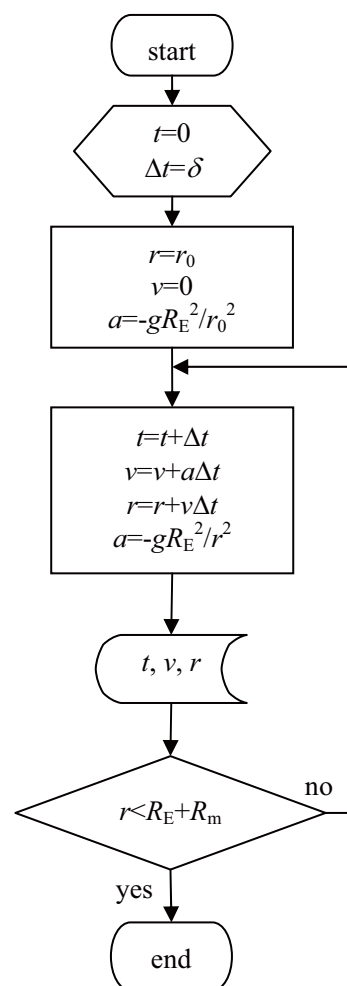


Fig. 2 Flowchart of calculation for falling of the moon to the Earth.

計算の手順を図2のフローチャートに示す。月と地球の距離 r が地球と月の半径の和 $R_E + R_m$ を下回った段階で衝突とみなし、計算を完了する。単純な繰り返し計算であるが、どのような運動方程式にも適用できるので、3年生の物理のプログラミングの演習として経験させておきたい課題である。なお、計算は、10進BASIC²⁾を用いておこなった。

3. 数値計算の結果

数値計算で求めた時間 t と距離 r の関係を図3にグラフで示す。用いた数値は、以下の通りである。

地球半径：	$R_E = 6.4 \times 10^6 \text{ m}$
月半径：	$R_m = 1.7 \times 10^6 \text{ m}$
月の公転軌道半径：	$r_0 = 3.84 \times 10^8 \text{ m}$
重力加速度：	$g = 9.8 \text{ m/s}^2$

月が地球に激突するまでの時間は、116時間、すなわち、4.8日と計算される。図3のグラフ形状が

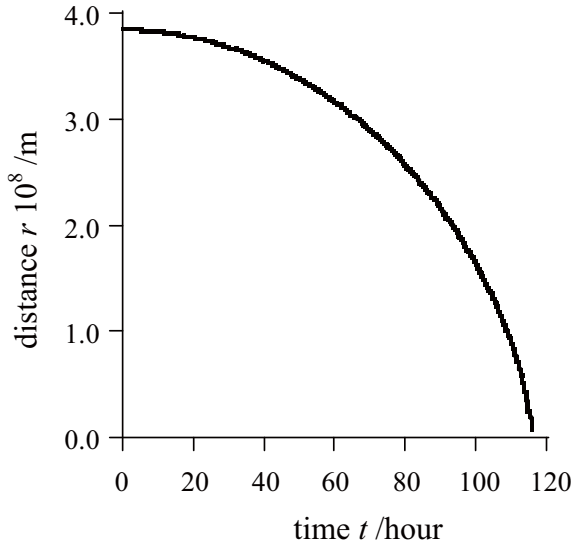


Fig. 3 A time-distance result of the numerical calculation.

ら判るように、落下の仕方は放物形状とは異なり、最初ゆっくりと加速し、地球に接近するにしたがい加速が増している。位置を時間の単純な関数で表すことは困難であることが予想される。

数値計算で求めた速度 v と時間 t の関係を図 4 に示す。衝突する直前に急激に速度が増大していることがわかる。激突する際の速度は、 $9.9 \times 10^3 \text{ m/s}$ と求まった。激突時 $r=R_E+R_m$ より、力学的エネルギー保存則から求めた激突速度 v_c は、

$$v_c = R_E \sqrt{2g \left(\frac{1}{R_E + R_m} - \frac{1}{r_0} \right)} \quad \dots (5)$$

であり、数値を代入すると、 $9.9 \times 10^3 \text{ m/s}$ と算出され、計算結果は一致している。

この種の数値計算で問題になるのは時間の増分 δ の設定方法である。値が大きいと誤差が大きくなるので適切な細かさに時間増分を設定する必要があるが、必要以上に細かくすると計算に時間がかかるだけでなく誤差が積算されて返って誤差が大きくなる虞がある。計算結果が妥当な値で安定する δ の値を実際の計算で確認するのが最も現実的である。今回の落下問題の場合、距離 r が小さくなると急激に加速度 a が大きくなるので、 δ を加速度の増大に応じて小さな値に変え、繰り返し計算における速度の変化分を常に一定にする操作が本来有効であると思われるが、誤差の見積もりについては少し高度な処理となり、そこまでは要求しなかった。

時間の増分を 1000 秒、100 秒、10 秒、1 秒、0.1 秒とした場合の計算結果を激突するまでの時間 t_c で

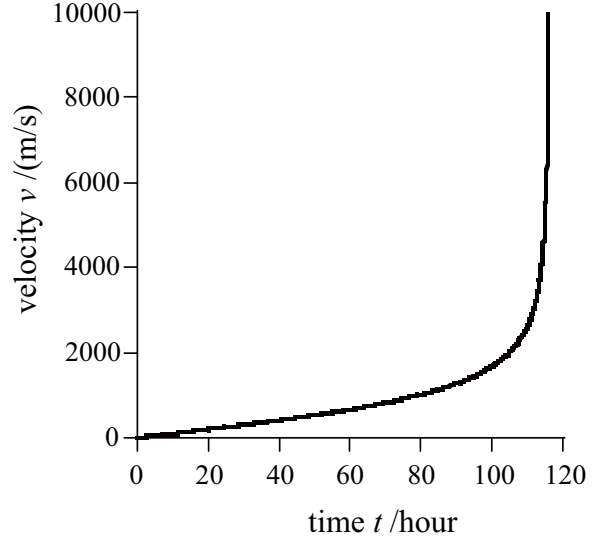


Fig. 4 A time-velocity result of the numerical calculation.

比較してみる。もちろん増分が大きいとその数値以下の精度は得られないので、時間単位で比較し、計算結果の妥当性を確認する。

$\delta=1000$ 秒	$t_c=116.4$ h
$\delta=100$ 秒	$t_c=115.8$ h
$\delta=10$ 秒	$t_c=115.7$ h
$\delta=1$ 秒	$t_c=115.7$ h
$\delta=0.1$ 秒	$t_c=115.7$ h

この結果より、100 秒以下であれば確度良く計算できることがわかる。1000 秒以上での誤差は激突時刻の読み取り精度が落ちることが原因であり、計算の誤差にはあまり影響がないようである。これは時刻が小さいときに速度が小さいことによると思われる。

4. 解析解

次に解析解の求め方であるが、式(1)の運動方程式の両辺に $2dr/dt$ を乗じて式を変形する。

$$2 \frac{dr}{dt} \frac{d^2r}{dt^2} = -2 \frac{dr}{dt} \frac{GM}{r^2}$$

$$\left(\frac{dr}{dt} \right)^2 = \frac{2GM}{r} + C \quad \dots (6)$$

ここで C は積分定数である。初期条件 $t=0$ で $r=r_0$ より、 $C = -2GM/r_0$ と算出されるので、

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = 2GM\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right)$$

$$\frac{dr}{dt} = -\sqrt{2GM\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right)}$$

となる。落下なので速度は負の値をとる。このように速度については距離 r を変数として容易に求まる。さらに、変数分離して、

$$\int_0^t dt = -\frac{1}{\sqrt{2GM}} \int_{r_0}^r \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}}} dr \quad \dots (7)$$

と計算され、距離 r を変数として時刻 t が求まる。右辺の距離の積分は面倒で、学生は以下の積分公式を参照した。

$$\int \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{x} - \frac{1}{a}}} dx = a^{3/2} \sin^{-1} \sqrt{\frac{x}{a}} - \sqrt{ax(a-x)} \quad \dots (8)$$

この積分は $x=a\sin^2\theta$ と置いて置換積分により、高校レベルの数学で求めることが出来る。積分の不得意な場合、Web上の計算サービスを利用するのも有効な手段であろう³⁾。最終的には、距離 r の位置に達するまでの時刻 t は、以下のように表せる。

$$t = \sqrt{\frac{r_0}{2GM}} \left\{ \sqrt{r(r_0-r)} + r_0 \left(\frac{\pi}{2} - \sin^{-1} \sqrt{\frac{r}{r_0}} \right) \right\} \quad \dots (9)$$

激突する時刻 t_c は、 $r=R_E+R_m$ として、

$$t_c = \sqrt{\frac{r_0}{2gR_E^2}} \left\{ \sqrt{(R_E+R_m)(r_0-R_E-R_m)} + r_0 \left(\frac{\pi}{2} - \sin^{-1} \sqrt{\frac{R_E+R_m}{r_0}} \right) \right\} \quad \dots (10)$$

と求まる。ここで $GM=gR_E^2$ の関係を用いた。数値を代入すると、 $t_c=4.16\times 10^5\text{s}=116\text{h}=4.8\text{日}$ と算出され、数値計算で得た値と一致する。

5. 結果の比較とまとめ

計算の出発点にあたる運動方程式は同じなので解析解の値と数値計算による値が一致するのは当然のことではある。しかし、学生には印象として計算手法が大きく異なるように映るらしく、数値が一致することに意外性を感じているようであった。

学生の感想としては、数値計算では位置と速度が時間の関数として視覚化されるため理解できたような気になるが、しかし問題を解いたという感覚は乏しい。逆に解析解の場合は解けたという達成感はあるものの定量的な把握に乏しい。特に、今回の報告では、距離と速度を時間の関数として求めることは行っておらず不満を感じるようである。幸運にも式(7)で変数分離できたため、衝突までの時間の計算ができたが、このような簡単な系でも解析解を求めるのは困難であることを知ってもらえたのは効果的であったと思う。同時に、数値計算により、運動方程式さえ立てることができればどのような系でもとりあえず簡単な手順で計算機を用いて数値計算して運動の様子を調べることができることを知ってもらえた。

数理科学I受講生の他の課題研究テーマとして、「机の上に立てた物差しの倒れ方」、「ペットボトルロケットの飛び方」など、運動方程式をもとに解析するテーマがあり、この月の落下問題が例題として数値計算により解析を進める参考になったようである。残念ながらこの2テーマについては07年度は結論をまとめるまでには至らなかったが、次年度の学生に引き継いで解析を深めてもらうよう指導する予定である。また、本報告の問題は数値計算による運動方程式の解法を3年生の物理の授業の中に取り入れる際に適した例題である。授業への導入を進める予定である。

謝辞

数値計算と解析にチャレンジしてくれた電気電子工学科、森本竜治君と電子制御工学科、神崎政人君に感謝します。

参考文献

- 1) 桜井邦朋, 「物の理」, 白日社, 東京, 2003年
- 2) <http://hp.vector.co.jp/authors/VA008683/>, 十進 BASIC ホームページ
- 3) <http://integrals.wolfram.com/index.jsp>, Web上の積分計算サービスサイト“The Wolfram INTEGRATOR”など