

不均質材料の弾性変形における変形拘束の解析

阿 部 武 治 * 三 宅 哲 也 **

Analysis of Mutual Constraint of Deformation at Boundary During Elastic Deformation of Inhomogeneous Material

Takeji ABE and Tetsuya MIYAKE

In the elastic deformation of inhomogeneous materials such as polycrystals, the deformation behavior is affected by the mutual constraint of deformation at the boundary. In the present study, starting from the well-known constant stress model and the constant strain model, the effects of the boundary angle and Poisson's ratio are studied, where a model of inhomogeneous material composed of two grains having inclined boundary is adopted. Next, a new model of inhomogeneous material called "modified constant stress model" is introduced, in which the deformation is constrained at the boundary between two different materials. Especially, the effect of constraint of strain along the boundary inclined to the direction of applied stress is discussed. The problem is also numerically analyzed with the elastic finite element method and the two-dimensional model of inhomogeneous material having the inclined boundary. The results of numerical calculation are compared with the analytical results adopting the parameter representing deformation mode which is called "constraint ratio".

Key Words : Elasticity, Composite Materials, Polycrystalline Metal, Constraint, Inclined Boundary

1. 緒 言

一般に複合材料や多結晶金属などの不均質な材料を変形させると、材料内部では応力やひずみの不均一を生じている。このような不均質体の力学的挙動を明らかにすることは重要であり、これを固体力学の観点から眺めると、場所によって材料の応力-ひずみ関係が異なる物体として扱うことができる。不均質体の変形について考える上での基本的なモデルとして、直列モデル（応力一定モデル）と並列モデル（ひずみ一定モデル）がある^{1)~5)}。多くの場合、不均質体の各領域や多結晶体の各結晶粒ではこれら二つのモデルの中間の変形が起きていると考えられる。すなわち、これら二つのモデルは不均質体の変形挙動の二つの極限、いいかえると上限と下限になっていることが知られている。

本報告では不均質材料の弾性変形において、一軸引張り負荷方向に直角な方向の拘束の影響を解析し、修正応力一定モデルとして提案し、ポアソン比の影響について検討する。また、2次元的な傾斜した境界をもつ不均質体モデルについて、弾性有限要素法を用いて数値計算を行い、上に述べた解析の結果と比較、検討する。

この修正応力一定モデルは、今後不均質体や複合材料の変形の解析に応用できる。また、このようなモデルは、ゴムの弾性変形や金属の塑性変形などの体積一定条件下での変形挙動の解明に役立つと考えられる。

2. 解 析 方 法

2. 1 修正応力一定モデルの提案

緒言でも述べたとおり、不均質体の変形を考えるモデルとして、ひずみ一定モデル（並列モデル）と応力一定モデル（直列モデル）がある（Fig. 1 (a) (b)）。

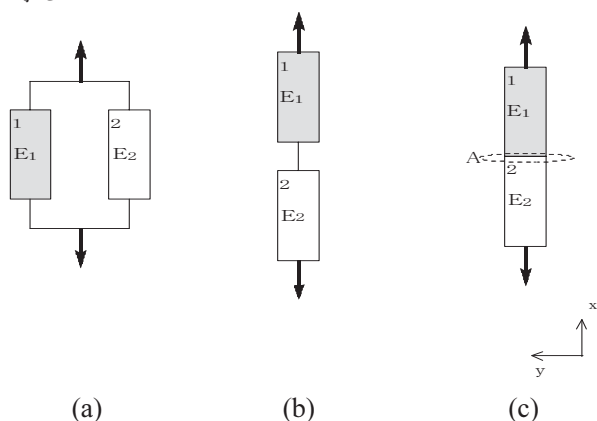
原稿受付 平成18年8月31日。

* 校長。

** 倉敷化工（株）倉敷市連島矢柄四の町 4630

ひずみ一定モデルは要素を荷重方向に対して並列に並べたものである。要素間の変形拘束が大きく、各要素における荷重方向のひずみは等しい。

一方、応力一定モデルは荷重方向に対して要素を直列に並べたものである。要素間の変形拘束は考えていない。また、各要素における荷重方向の応力は等しい。



(a) Constant strain model, (b) Constant stress model and (c) Modified constant stress model

Fig. 1 Models of inhomogeneous material

応力一定モデルでは要素の変形拘束は考えていない。しかし、各要素が接合していると考えたとき、Fig. 1 (c) の A で表される境界において荷重方向と垂直な方向 (Fig. 1 では y, z 方向) に変位が拘束されており、この変形拘束が荷重方向の変形拘束に影響することが考えられる。特に、粒界付近の変形挙動を表すにはこれを考慮したモデルを使う方が適していると考えられる。ここでは、この境界で変位が拘束されている応力一定モデルについて、平面応力や平面ひずみなどの場合について考慮した三つのモデル (Model 1~Model 3) を考える。

(a) 境界で変位が拘束されている応力一定モデル (Model 1)

Fig. 1 (c) の要素間の境界において、x 方向の荷重による各要素の y 方向と z 方向の変位が束されて

いると考える。境界における各要素の応力ひずみは次のように仮定する。

$$\begin{cases} \sigma_{x1} = \sigma_{x2} \\ \sigma_{y1} + \sigma_{y2} = 0 \\ \sigma_{z1} + \sigma_{z2} = 0 \\ \varepsilon_{y1} = \varepsilon_{y2}, \quad \varepsilon_{z1} = \varepsilon_{z2} \end{cases} \quad (1)$$

これらの条件と、各要素の各方向の応力-ひずみ関係式から、Model 1 の荷重方向の平均縦弾性係数 $E_{\sigma*}$ は次のように与えられる。(添字 1, 2 はそれぞれ不均質の領域 1, 2 に対応する。)

$$\frac{1}{E_{\sigma*}} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} \right) - \frac{\nu^2}{1-\nu} \frac{\left(\frac{1}{E_1} - \frac{1}{E_2} \right)^2}{\left(\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} \right)} \quad (2)$$

(b) 境界で変位が拘束されている応力一定モデル (Model 2)

Fig. 1 (c) の要素間の境界において、x 方向の荷重による各要素の y 方向の変位が拘束されていると考える。平面応力の場合を考えて z 方向の応力を 0 とし、境界における各要素の応力、ひずみは次のように仮定する。

$$\begin{cases} \sigma_{x1} = \sigma_{x2} \\ \sigma_{y1} + \sigma_{y2} = 0 \\ \sigma_{z1} = \sigma_{z2} = 0 \\ \varepsilon_{y1} = \varepsilon_{y2} \end{cases} \quad (3)$$

これらの条件と、各要素の各方向の応力-ひずみ関係式から、Model 2 の荷重方向の平均縦弾性係数 $E_{\sigma*}$ は次のように与えられる。

Table 1 Averaged Young's moduli E_{ε} and E_{σ} for constant strain and constant stress model

	Constant strain model	Constant stress model
Plane stress	$E_{\varepsilon} = \frac{1}{2}(E_1 + E_2)$	$\frac{1}{E_{\sigma}} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} \right)$
Plane strain	$E_{\varepsilon} = \frac{1}{1-\nu^2} \frac{1}{2}(E_1 + E_2)$	$\frac{1}{E_{\sigma}} = (1-\nu^2) \frac{1}{2} \left(\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} \right)$

$$\frac{1}{E_{\sigma*}} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} \right) - \frac{\nu^2}{2} \frac{\left(\frac{1}{E_1} - \frac{1}{E_2} \right)^2}{\left(\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} \right)} \quad (4)$$

(c) 境界で変位が拘束されている応力一定モデル (Model 3)

Fig. 1 (c) の要素間の境界において、 x 方向の荷重による各要素の y 方向と z 方向の変位が拘束されていると考える。平面ひずみの場合を考えて z 方向の変位 0 とし、境界における各要素の応力、ひずみは次のように仮定する。

$$\begin{cases} \sigma_{x1} = \sigma_{x2} \\ \sigma_{y1} + \sigma_{y2} = 0 \\ \varepsilon_{y1} = \varepsilon_{y2} \\ \varepsilon_{z1} = \varepsilon_{z2} = 0 \end{cases} \quad (5)$$

これらの条件と、各要素の各方向の応力-ひずみ関係式から、Model 3 の荷重方向の平均縦弾性係数 $E_{\sigma*}$ は次のように与えられる。

$$\frac{1}{E_{\sigma*}} = (1-\nu^2) \frac{1}{2} \left(\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} \right) - \frac{\nu^2(1+\nu)}{2(1-\nu)} \frac{\left(\frac{1}{E_1} - \frac{1}{E_2} \right)^2}{\left(\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} \right)} \quad (6)$$

2. 2 傾斜した粒界を持つ不均質体の解析

2. 2. 1 不均質体のモデル

Fig. 2 に示すような 1 軸荷重における 2 つの結晶粒からなる傾斜した粒界を持つ不均質体について考える。荷重方向を x 、荷重方向と垂直な方向を y 、 z とし、粒界の法線方向を x' 、粒界の方向を y' とする。また、荷重方向と粒界のなす角を θ 、荷重方向と粒界の法線方向のなす角を α とする。各結晶粒の縦弾性係数とせん断弾性係数を E 、 G とする。ポアソン比は各結晶粒とも等しいとし、 ν とおく。

粒界の法線方向 (x' 方向) と粒界の方向 (y' 方向) について $x'y'$ 座標系の材料定数を $E_{x'}$ 、 $E_{y'}$ 、 $G_{x'y'}$ 、・・・とおくと、 $x'y'$ 座標系の応力-ひずみ関係式は次のようにおける。

ここで、不均質体の変形拘束をひずみ一定モデルと応力一定モデルを用いて解析するにあたって、Fig. 2 に示す不均質体の粒界付近において、結晶

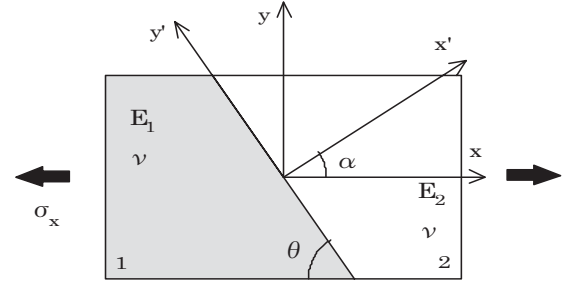


Fig. 2 Model of Inhomogeneous material with inclined boundary

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{x'} \\ \varepsilon_{y'} \\ \varepsilon_{z'} \\ \gamma_{x'y'} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_{x'}} & -\frac{\nu_{y'x'}}{E_{y'}} & -\frac{\nu_{z'x'}}{E_{z'}} & 0 \\ -\frac{\nu_{x'y'}}{E_{x'}} & \frac{1}{E_{y'}} & -\frac{\nu_{z'y'}}{E_{z'}} & 0 \\ -\frac{\nu_{x'z'}}{E_{x'}} & -\frac{\nu_{y'z'}}{E_{y'}} & \frac{1}{E_{z'}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{x'y'}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{x'} \\ \sigma_{y'} \\ \sigma_{z'} \\ \tau_{x'y'} \end{Bmatrix} \quad (7)$$

粒は x' 方向には直列、 y' 方向には並列に位置しているとみることができる。このことから、各方向の応力に対して次のような変形が起こっていると仮定する。

- x' 方向の応力 $\sigma_{x'}$ による変形：応力一定モデル
- y' 方向の応力 $\sigma_{y'}$ による変形：ひずみ一定モデル
- せん断応力 $\tau_{x'y'}$ による変形：応力一定モデル

次に、境界で変位が拘束されている応力一定モデルを用いる場合には、次のような変形が起こっていると仮定する。

- x' 方向の応力 $\sigma_{x'}$ による変形：境界で変位が拘束されている応力一定モデル
- y' 方向の応力 $\sigma_{y'}$ による変形：ひずみ一定モデル
- せん断応力 $\tau_{x'y'}$ による変形：応力一定モデル

これらの仮定から、 $x'y'$ 座標系の材料定数 $E_{x'}$ 、 $E_{y'}$ 、 $G_{x'y'}$ は次のようにおける。

$$E_{x'} = E_{\sigma}, E_{\sigma*}, E_{y'} = E_{\varepsilon}, G_{x'y'} = G_{\sigma} \quad (8)$$

それぞれの変形モデルを用いた解析における $x'y'$ 座標系の材料定数はそれぞれ Table 2 のようになる。

2. 2. 2 不均質体の荷重方向の平均縦弾性係数 E_x

$x'y'$ 方向の応力-ひずみ関係式を座標変換して、 xy 方向の応力-ひずみ関係式を求め、 x 方向の応力 σ_x による x 方向のひずみ ε_x についての関係から x 方向の平均縦弾性係数 E_x の式を導く⁶⁾。

x 方向の平均縦弾性係数 E_x に各変形モデルを用いた解析での $x'y'$ 座標系の材料定数を代入すると、各モデルを用いた解析による不均質体の荷重方向の平均縦弾性係数 E_x が、それぞれ応力一定モデルについて式 (9)、ひずみ一定モデルについて式 (10)、境界で変位が拘束されている修正応力一定モデルについて式 (11) ~ (13) のように求められる。

(a) 応力一定モデルとひずみ一定モデルによる不均質体の荷重方向の平均縦弾性係数 E_x

・ 平面応力の場合

$$\frac{1}{E_x} = \frac{E_1 + E_2}{2E_1E_2} \sin^4 \theta + \frac{2}{E_1 + E_2} \cos^4 \theta + \left((1+\nu) \frac{E_1 + E_2}{E_1E_2} - \nu \frac{E_1 + E_2}{2E_1E_2} - \nu \frac{2}{E_1 + E_2} \right) \sin^2 \theta \cos^2 \theta \quad (9)$$

・ 平面ひずみの場合

$$\frac{1}{E_x} = (1-\nu^2) \frac{E_1 + E_2}{2E_1E_2} \sin^4 \theta + (1-\nu^2) \frac{2}{E_1 + E_2} \cos^4 \theta + (1+\nu) \left(\frac{E_1 + E_2}{E_1E_2} - \nu \frac{E_1 + E_2}{2E_1E_2} - \nu \frac{2}{E_1 + E_2} \right) \sin^2 \theta \cos^2 \theta \quad (10)$$

(b) 修正応力一定モデルによる不均質体の荷重方向の平均縦弾性係数 E_x

・ Model 1 の場合

$$\frac{1}{E_x} = \left(\frac{E_1 + E_2}{2E_1E_2} - \frac{\nu^2}{1-\nu} \left(\frac{1}{E_1} - \frac{1}{E_2} \right)^2 \right) \sin^4 \theta + \frac{2}{E_1 + E_2} \cos^4 \theta + \left((1+\nu) \frac{E_1 + E_2}{E_1E_2} - \nu \frac{4}{E_1 + E_2} \right) \sin^2 \theta \cos^2 \theta \quad (11)$$

・ Model 2 の場合

$$\frac{1}{E_x} = \left(\frac{E_1 + E_2}{2E_1E_2} - \frac{\nu^2}{2} \left(\frac{1}{E_1} - \frac{1}{E_2} \right)^2 \right) \sin^4 \theta + \frac{2}{E_1 + E_2} \cos^4 \theta + \left((1+\nu) \frac{E_1 + E_2}{E_1E_2} - \nu \frac{4}{E_1 + E_2} \right) \sin^2 \theta \cos^2 \theta \quad (12)$$

Table 2 Elastic constants for modified constant stress model in $x'y'$ -coordinates

	Model 1	Model 2	Model 3
$\frac{1}{E_{x'}}$	$\frac{E_1 + E_2}{2E_1E_2} - \frac{\nu^2}{1-\nu} \left(\frac{1}{E_1} - \frac{1}{E_2} \right)^2$	$\frac{E_1 + E_2}{2E_1E_2} - \frac{\nu^2}{2} \left(\frac{1}{E_1} - \frac{1}{E_2} \right)^2$	$(1-\nu^2) \frac{E_1 + E_2}{2E_1E_2} - \frac{\nu^2(1+\nu)}{2(1-\nu)} \left(\frac{1}{E_1} - \frac{1}{E_2} \right)^2$
$\frac{1}{E_{y'}}$	$\frac{2}{E_1 + E_2}$	$\frac{2}{E_1 + E_2}$	$(1-\nu^2) \frac{2}{E_1 + E_2}$
$\frac{\nu_{x'y'}}{E_{x'}}$	$\nu \frac{2}{E_1 + E_2}$	$\nu \frac{2}{E_1 + E_2}$	$\nu(1+\nu) \frac{2}{E_1 + E_2}$
$\frac{\nu_{y'x'}}{E_{y'}}$	$\nu \frac{2}{E_1 + E_2}$	$\nu \frac{2}{E_1 + E_2}$	$\nu(1+\nu) \frac{2}{E_1 + E_2}$
$\frac{1}{G_{x'y'}}$	$(1+\nu) \frac{E_1 + E_2}{E_1E_2}$	$(1+\nu) \frac{E_1 + E_2}{E_1E_2}$	$(1+\nu) \frac{E_1 + E_2}{E_1E_2}$

• Model 3 の場合

$$\frac{1}{E_x} = \left((1-\nu^2) \frac{E_1+E_2}{2E_1E_2} - \frac{\nu^2(1+\nu)}{2(1-\nu)} \left(\frac{1}{E_1} - \frac{1}{E_2} \right)^2 \right) \sin^4 \theta + (1-\nu^2) \frac{2}{E_1+E_2} \cos^4 \theta + (1+\nu) \left(\frac{E_1+E_2}{E_1E_2} - \nu \frac{4}{E_1+E_2} \right) \sin^2 \theta \cos^2 \theta \quad (13)$$

2. 3 不均質体の拘束率 η_x

前節で求めた不均質体の荷重方向の平均縦弾性係数 E_x によって変形拘束の強さを示すことはできる．しかし異なる材料定数を持つ別の不均質体と比較するのは難しい．そこで拘束の程度を表すパラメータとして先に提案されている次の拘束率 η_x を用いる^{7) 8)}．

$$\eta_x = \frac{\Delta \varepsilon_x}{(\Delta \varepsilon_x)_{\max}} \quad (14)$$

ここに、

$\Delta \varepsilon_x$: 不均質体内部のひずみ ε_x の平均値からのずれ

$(\Delta \varepsilon_x)_{\max}$: 応力一定の場合における不均質体内部のひずみ ε_x の平均値からのずれ

この拘束率 η_x を縦弾性係数 E_x , E_σ , E_ε で表すと次式のようになる．

$$\eta_x = \frac{E_x - E_\varepsilon}{E_\sigma - E_\varepsilon} \quad (15)$$

ここで、 $\eta_x = 0$ はひずみ一定に、 $\eta_x = 1$ は応力一定にそれぞれ対応する．つまり、拘束率が大きいほどその方向の変形拘束は小さいことを示している．

2. 4 有限要素法による不均質体の解析

前節の傾斜した粒界を持つ不均質体の解析と比較するために、弾性有限要素法 (FEM, Finite Element Method) を用いて、Fig. 3 に示す傾斜した粒界 (FH) をもつ二つの結晶粒 (AFHD, BCHF) からなる不均質体のモデル (ABCD, 693

節点, 1280 要素) を解析する．各結晶粒の縦弾性係数をそれぞれ E_1 , E_2 とし、ポアソン比は等しく ν とする．AB, AD の長さはそれぞれ 32, 20R である．境界条件は 1 軸引張りを考えて、平面応力の場合について DA, BC の x 方向の変位をそれぞれ 0, 0.1 とし、節点 B, D の y 方向の変位をそれぞれ $0.1R\nu$, 0 とする．また、平面ひずみ場合は節点 B の y 方向の変位を $0.1R\nu/(1-\nu)$ とする．そして粒界の角度 θ ($\theta = \tan^{-1} R$, $R = b/a$) を変化させ、J で示す粒界付近の 4 個の要素における x 方向の拘束率の平均値 η_j を求める．

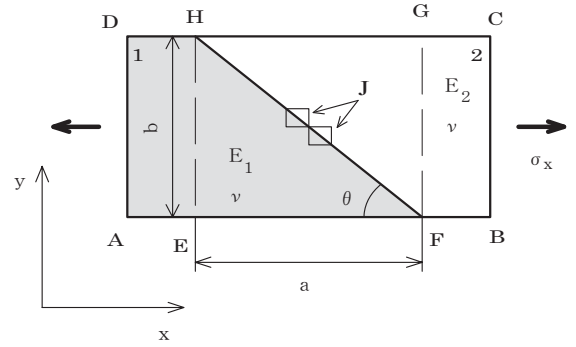


Fig. 3 Model of inhomogeneous body used for FEM calculation

ここで、Fig. 3 に示す不均質体モデルの要素 j における x 方向の拘束率 η_j は次式から求める^{7) 8)}．

$$\eta_j = -\frac{\Delta \varepsilon_x}{\Delta E_m} \bigg/ \frac{\overline{\varepsilon_x}}{E_m} \quad (16)$$

ここに、各変数は次のとおりである．

E_m : 不均質全体の平均縦弾性係数

$\overline{\varepsilon_x}$: 不均質体全体の平均ひずみ

$\Delta \varepsilon_x$: ε_x に対する要素 j のひずみのずれ

ΔE_m : E_m に対する要素 j の縦弾性係数のずれ

3. 解析結果と考察

以下では一例として、不均質体の各結晶粒の縦弾性係数 E_1 , E_2 を次のようにおいて数値計算を行い、比較検討する．

$$\begin{cases} E_1 = E_0(1+\phi) \\ E_2 = E_0(1-\phi) \\ E_0 = 100 \text{ [MPa]} \\ 0 \leq \phi \leq 1 \end{cases} \quad (17)$$

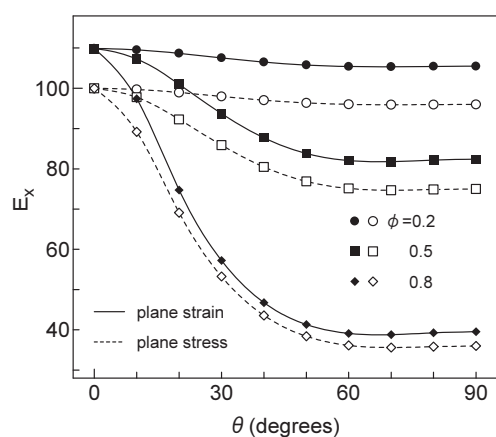
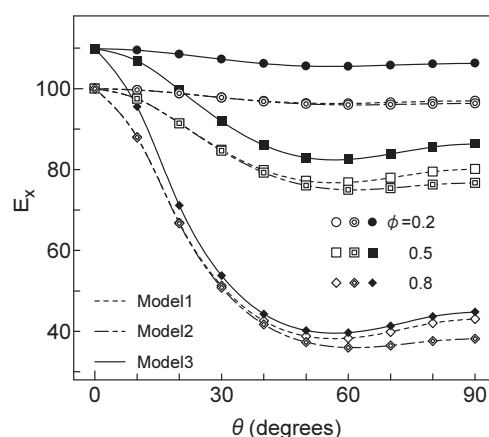
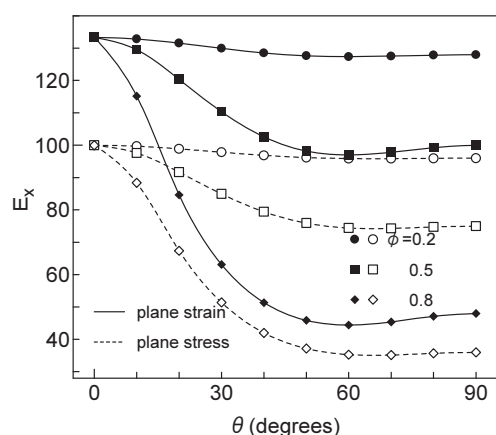
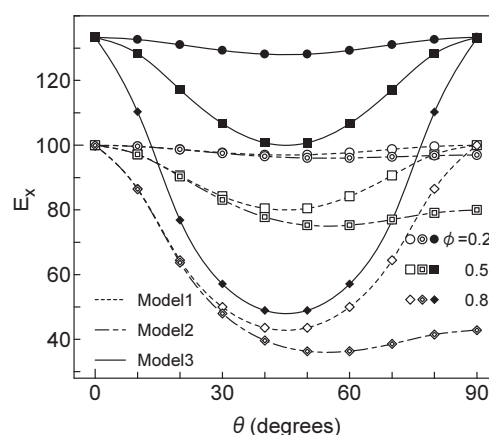

(a) Averaged Young's modulus for $\nu = 0.3$

(a) Averaged Young's modulus for $\nu = 0.3$

(b) Averaged Young's modulus for $\nu = 0.5$

(b) Averaged Young's modulus for $\nu = 0.5$

Fig. 4 Change of averaged Young's modulus E_x calculated for inhomogeneous body with angle θ of inclined boundary

Fig. 5 Averaged Young's modulus E_x in x-direction for modified constant stress models versus boundary angle θ

ここで、 ϕ は各結晶粒の縦弾性係数 E_1 、 E_2 の不均質の程度を表すパラメータである。

3. 1 不均質体の荷重方向の平均縦弾性係数 E_x

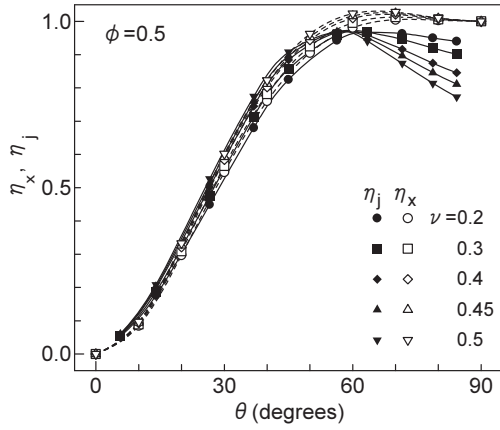
Fig. 4 はひずみ一定モデルと応力一定モデルを用いた解析で導かれた式から粒界の傾斜角度 θ と荷重方向の平均縦弾性係数 E_x の関係を示している。この図において、平面応力の場合にはポアソン比の影響があまりみられないが、平面ひずみの場合にはポアソン比の影響がみられる。また、平均縦弾性係数 E_x が最小となるのは変形拘束を考慮していない応力一定モデルとなる $\theta = 90^\circ$ のときではなく、およそ $60^\circ \sim 70^\circ$ 付近で最小になる。これはせん断応力の影響であると考えられる。

Fig. 5 は境界で変位が拘束されている応力一定モデルを用いた解析で導かれた式から Fig. 4 と同様の θ と E_x の関係を示している。この図では、Model 1～Model 3 のどの場合にもポアソン比の影響がみられるが、特にModel 1とModel 3で大きな影響が認められる。

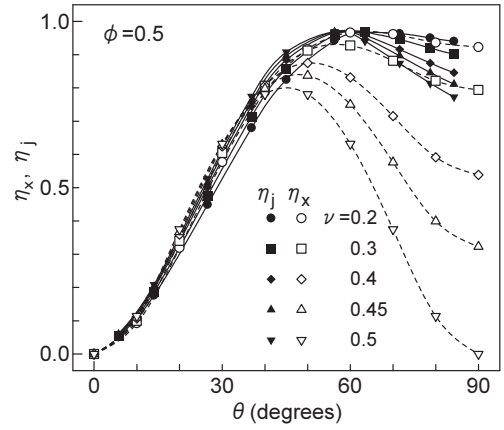
3. 2 不均質体の荷重方向の拘束率 η_x, η_j

Fig. 6 はそれぞれ不均質度 $\phi = 0.5$ のときのひずみ一定モデルと応力一定モデルを用いた解析による拘束率 η_x と有限要素法を用いた解析による拘束率 η_j を示している。

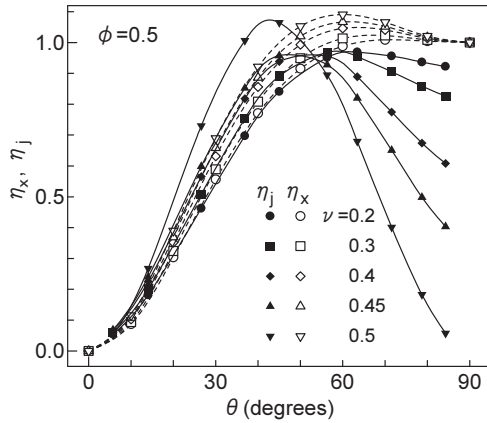
Fig. 6 において、粒界の傾斜角度 θ が小さいところでは η_x と η_j は近い値をとっているが、



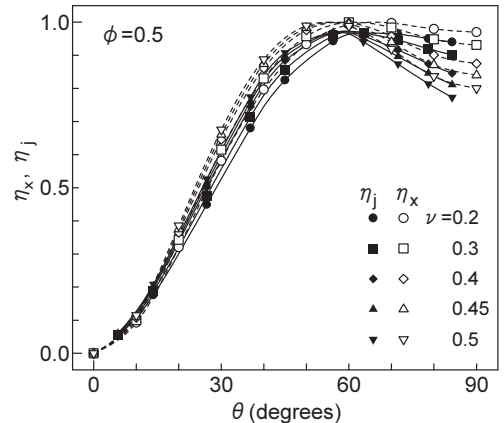
(a) Constraint ratio under plane stress



(a) Constraint ratio for Model 1 and plane stress FEM



(b) Constraint ratio under plane strain

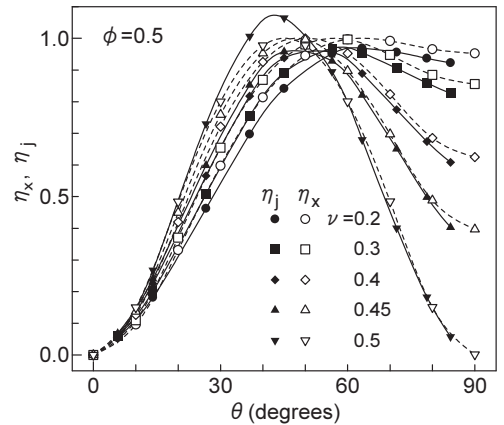


(b) Constraint ratio for Model 2 and plane stress FEM

 Fig. 6 Change of constraint ratios η_x calculated from modified constant stress model and η_j calculated by FEM with boundary angle θ ($\phi = 0.5$)

$\theta = 90^\circ$ (応力一定) に近いところでは η_x と η_j の違いがみられる。有限要素法による解析では $\theta = 90^\circ$ に近いところで η_j が η_x の値より小さくなっている。これは $\theta = 90^\circ$ 付近において変形拘束があることを示している。このことから必ずみ一定モデルと応力一定モデルを用いた解析について特に応力一定モデルが粒界付近の変形拘束を示すには十分でないとと言える。なお、不均質度 ϕ が大きくなると、粒界の傾斜角度 θ が小さいところでも η_x と η_j の差が大きくなる傾向を示した。

Fig. 7 はそれぞれ不均質度 $\phi = 0.5$ のときの境界で変位が拘束されている応力一定モデルを用いた解析による拘束率 η_x と有限要素法を用いた解析による拘束率 η_j を示している。



(c) Constraint ratio for Model 3 and plane strain FEM

 Fig. 7 Averaged Young's modulus E_x in x-direction for modified constant stress models versus boundary angle θ ($\phi = 0.5$)

Fig. 7 (a) では Model 1 を用いた解析の拘束率 η_x について粒界の傾斜角度 $\theta = 90^\circ$ 付近で η_x が

小さくなっている．特にポアソン比 ν が大きいとき強い拘束が発生しており，この点で平面応力の場合のFEMを用いた解析の拘束率 η_j と大きく異なっている．また，Fig. 7 (b) のModel 2 を用いた解析の拘束率 η_x と平面応力の場合のFEMを用いた解析の拘束率 η_j ，および Fig. 7 (c) のModel 3を用いた解析の拘束率 η_x と平面ひずみの場合のFEMを用いた解析の拘束率 η_j については，それぞれの傾斜角度 θ においても近い値を示している．このことから，Model 2, Model 3を用いることによってそれぞれ平面応力と平面ひずみの場合について傾斜した粒界を持つ不均質体の粒界付近の変形拘束を示すことができると言える．

以上のように，不均質体の変形における材料の境界での拘束については，ポアソン比の影響が大きく， $\nu=0.5$ ではその影響が特に大きいことが解析的に示された．このことは，次のような問題に対して考慮しておく必要があると考えられる．

(1) ゴム複合体の変形の場合．ゴムはポアソン比 $\nu=0.5$ であることが知られており，したがって本報告で述べたような境界面での変形拘束の影響が大きいと推定される．

(2) 金属などの塑性変形においては，体積一定条件がほぼ成り立つことが知られている．このことは，弾性変形においてポアソン比が $\nu=0.5$ であることに相当するので，複合体や多結晶体の塑性変形においても，境界面での変形拘束が影響すると考えられる．

4. 結 言

本研究では，傾斜した粒界を持つ二つの不均質な領域からなる材料が，1軸応力を受ける場合の解析を行った．また，応力一定モデルにおいてモデルの要素の境界で荷重方向に対して垂直方向の変位が拘束されている場合について考え，この拘束によって荷重方向に変形拘束を持つ修正応力一定モデルを導いた．得られた主な結果を要約すると次のようになる．

(1) 不均質体の応力一定モデル，ひずみ一定モデルに対して，横方向の拘束を取り入れた修正応

力一定モデルを提案した．

(2) これらの解析と比較するために，傾斜した粒界を持つ不均質体のモデルについて有限要素法を用いて不均質境界付近の荷重方向の拘束率 η_j を求め，解析の結果と先に提案した拘束率で比較したところ，両者はよく一致した．

(3) すなわち，ひずみ一定モデルと応力一定モデルを用いた解析では拘束率について，粒界の傾斜角度 θ が小さいところでは有限要素法と近い傾向を示したが， $\theta=90^\circ$ (応力一定) に近いところでは拘束率 η_x ， η_j の差が大きくなった．このことから特に応力一定モデルが粒界付近の変形拘束を示すには十分でないと言える．

(4) 境界で変位が拘束されている修正応力一定モデルを用いた解析では粒界の傾斜角度が $\theta=90^\circ$ (応力一定) 付近で拘束が発生しており，拘束率は有限要素法による数値解析と同じ傾向を示した．このことから，本報告で提案した境界で変位が拘束されている修正応力一定モデルを用いることによって，不均質体の粒界付近の変形拘束を十分に表すことが可能であることが確認された．

参 考 文 献

- 1) 阿部武治，結晶塑性解析の発展，材料，**28**-305 (1979)，pp. 87-99.
- 2) 阿部武治，材料研究と数値シミュレーション (1)，機械の研究 **42**-3 (1990)，pp. 341-347.
- 3) 阿部武治，結晶塑性と構成式，塑性と加工，**29**-331 (1988)，pp. 789-798.
- 4) J. R. Vinson and R. L. Sierakowski, 福田博 他 訳：複合材料の構造力学，日刊工業新聞 (1987).
- 5) 森田幹郎，金原勲，福田博：複合材料，日刊工業新聞 (1988).
- 6) 藤本邦彦，加部和幸，石上俊弥，複合材料学会誌，**12**-4 (1986)，pp. 163-170.
- 7) 阿部武治，多結晶金属の変形，機械学会論文集，**34**-264 (1968)，pp. 1387-1393.
- 8) 阿部武治，多結晶体など不均質な材料の多軸応力下の弾性変形，機械学会論文集，**44**-384 (1978)，pp. 2559-2567.